



ISSN 2410-2547

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 98

Заснований у 1965 р.

КИЇВ 2017

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Головний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник головного редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

П.В. Алявдін, д-р техн. наук (Польща)
Ю. Атковічунас, д-р техн. наук (Литва)
О.М. Белостоцький, д-р техн. наук (Росія)
І. Елішаков, д-р техн. наук (США)
С.Н. Кривошапко, д-р техн. наук (Росія)
С.Ю. Фіалко, д-р техн. наук (Польща)
Чан Дик Тінг, д-р техн. наук (В'єтнам)
Л.М. Лобанов, д-р техн. наук, академік
НАН України

А.В. Перельмутер, д-р техн. наук
О.Ф. Дащенко, д-р техн. наук
П.В. Ясній, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Г.М. Іванченко, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
І.І. Колодей, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 27 жовтня 2017 р. (протокол №7).

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 98 / Голов. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2017. – 176 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталях і змінних у часі навантажень, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Індексація і партнери



<http://opir.knuba.edu.ua/>
Адреса редакційної колегії:
КНУБА, Повітрофлотський пр., 31.
м. Київ, 03037
Тел.: (044) 248-3040
E-mail: omtc@knuba.edu.ua

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61
© КНУБА, 2017

УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИК ПРОГНОЗУВАННЯ ПРУЖНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ В СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНІЙ МОДЕЛІ ОБОЛОНКИ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ

В.А. Баженов¹,
д-р техн. наук;

О.П. Кривенко¹,
канд. техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; e-mail: olakor@ukr.net*

Розглянуто методику врахування у скінченноелементній моделі оболонки неоднорідної структури мікромеханічних параметрів складових композитного матеріалу, що армований односпрямованими волокнами. Визначення ефективних характеристик матеріалу реалізується за структурними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування пружних сталей для даної моделі композитного матеріалу. Наведено результати чисельних досліджень багатошарової композитної панелі з використанням різних мікромеханічних методик.

Ключові слова: тонка пружна оболонка, багатошаровий скінченний елемент, композитний матеріал, мікромеханічні параметри.

Вступ. В останній час композитні матеріали знаходять все ширше застосування в авіакосмічній і суднобудівній техніці, промисловому та транспортному будівництві, ядерній та електротехнічній промисловості та багатьох інших провідних галузях сучасної техніки, оскільки за своїми характеристиками (властивостями) вони можуть бути ефективнішими за традиційні матеріали.

Композитні матеріали (КМ) або композити відносяться до принципово нових штучно створюваних матеріалів [1-3]. Найбільш дослідженими в теорії композитів та найпоширенішими на практиці композитними матеріалами є матеріали з волокнистою структурою [4-7]. Конструкції, що створені з КМ даної структури, відзначаються високою несучою спроможністю за вибраними напрямками. Ці матеріали часто використовуються в тонкостінних оболонкових конструкціях, які мають невелику масу і різноманітні геометричні форми [1, 2, 8, 9]. Висока міцність КМ при відносно малій об'ємній вазі, стійкість щодо атмосферних впливів, а також низка інших цінних властивостей визначають їхню ефективність і перспективність у застосуванні [10]. Зростаючі потреби практики та впровадження нових композитних

матеріалів вимагають подальшого удосконалення методів розрахунку оболонкових конструкцій неоднорідної структури [11].

У монографіях [12, 13] описано розроблений скінченноелементний метод і результати досліджень статичних задач геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки оболонок різної форми та структури при дії силових і температурних полів. Робота, що пропонується, присвячена поширенню розробленого методу [12, 13] на задачі дослідження тонких неоднорідних оболонок, шари яких виконані з композитного матеріалу волокнистої структури і є продовженням робіт [14, 15], в яких наведено методику врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі оболонки неоднорідної структури.

Постановка задачі та її вирішення. Скінченноелементний метод [12, 13] розроблено з єдиних методологічних позицій тривимірної теорії термопружності для широкого класу тонких пружних неоднорідних оболонок складної структури. Під неоднорідністю оболонки розуміються її геометричні особливості у вигляді неперервно- та ступінчасто-змінної товщини, зломів, отворів і неоднорідність матеріалу вздовж товщини й у плані. Тонкі неоднорідні оболонки розглядаються як тривимірні тіла з позицій просторової теорії термопружності з використанням апарата тензорного числення. Співвідношення, що в компактній формі описують напружено-деформований стан (НДС) оболонки, подаються в місцевій криволінійній x^i та глобальній декартовій $x^{i'}$ системах координат. Дослідження процесів нелінійного деформування оболонок виконується на основі загальної лагранжевої постановки варіаційної задачі у приростах, коли траєкторія векторів деформацій та напружень будується за компонентами приростів скінченних деформацій та приростів напружень у базисі лагранжевої (супутньої) системи координат. Задача полягає в знаходженні нового НДС (приростів напружень і приростів скінченних деформацій у актуальній конфігурації) і побудова нової геометрії (деформованої форми) оболонки від дії приростів зовнішніх сил.

Особливості НДС тонкої оболонки враховані двома гіпотезами. Застосована неklasична кінематична гіпотеза деформівної прямої у напрямку товщини оболонки (вздовж осі x^1), яка залишається прямою і після деформування, скорочуючись чи подовжуючись. Шари оболонки жорстко поєднані між собою в монолітний пакет, деформуючись спільно без проковзування та відриву по поверхнях контактів, на яких виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Гіпотеза забезпечує достовірність результатів у задачах стійкості та коливань

тонких багат шарових оболонок при накладанні певних обмежень на властивості матеріалів шарів. У статичній гіпотезі напруження σ_n^{11} обтиснення волокон шарів оболонки за товщиною прийняті сталими вздовж осі x^1 .

Використана модель пружного нелінійно деформівного суцільного середовища при великих переміщеннях $u^{k'}$ і малих деформаціях ε_{kl} , компоненти яких є лінійними функціями напружень σ^{ij} . Зв'язок між компонентами тензорів деформацій і напружень для анізотропного матеріалу встановлений узагальненим законом Дюамеля–Неймана.

На базі універсального ізопараметричного просторового скінченного елемента (СЕ) з полілінійними функціями форми та введеними додатковими змінними параметрами побудовано розрахункову модель методу скінчених елементів, що враховує одним СЕ за товщиною геометричні особливості конструктивних елементів (змінність товщини, злами та гранованість обшивки, ребра, накладки, виїмки, отвори) і неоднорідності матеріалу (вставки та багат шарову структуру) тонкої оболонки. Для отримання розв'язувальних рівнянь застосована моментна схема скінчених елементів (МССЕ).

Для моделювання термопружних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки застосовано підхід, що базується на структуруванні неоднорідностей матеріалу за товщиною та у плані оболонки за допомогою багат шарового просторового СЕ. Матеріали шарів представляються як однорідні анізотропні матеріали з заданими термопружними властивостями. Прийнято [14], що будь-які матеріали шарів, термопружні властивості яких задаються безпосередньо через відомі технічні сталі, відносяться до класу традиційних матеріалів. Ті матеріали, властивості яких визначаються через мікромеханічні характеристики їхніх компонентів, відносяться до класу композитних матеріалів.

Таким чином, у рамках створеної моделі багат шаровий скінченний елемент можна використовувати як СЕ, що дозволяє моделювати матеріал оболонки різними типами традиційних і композитних матеріалів шарів. У межах одного СЕ волокнистий матеріал природно приймається як односпрямований, тобто всі волокна прямі, паралельні та спрямовані в одному напрямку. В різних СЕ прямі волокна можуть мати різні напрямки. За рахунок цього можна моделювати криволінійну анізотропію матеріалу шару неоднорідної оболонки [14, 15]. Враховуючи, що визначення ефективних характеристик реалізується за структурними параметрами компонентів матеріалу, тому на цьому етапі розроблену методику можна розглядати власне як мікромеханічну модель.

Для визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу в механіці композитних матеріалів існують різні мікромеханічні методики прогнозування констант пружності волокнистих композитів [7, 16-22], що побудовані на основі низки гіпотез і припущень. На основі цих припущень матеріал в шарі СЕ можна вважати трансверсально-ізотропним. Ефективними термopружними сталими для трансверсально-ізотропної моделі КМ є [12, 13, 15]:

E , E' – модулі пружності для розтягу-стиску в площині ізотропії та в напрямку нормальному до неї (в напрямку волокон);

ν , ν' – коефіцієнти Пуассона, які характеризують скорочення в площині ізотропії при розтягу в цій площині та напрямку нормальному до неї;

$G = E/[2(1+\nu)]$ – модуль зсуву для площини ізотропії;

G' – модуль зсуву для площин, які нормальні до площини ізотропії;

α , α' – коефіцієнти термічного розширення.

Вказані ефективні сталі односпрямованого волокнистого композитного матеріалу шару визначаються за відповідними мікромеханічними параметрами компонентів матеріалу (волокна « f » та матриці « m »): E_f , E_m - модулі пружності; G_f , G_m - модулі зсуву; ν_f , ν_m - коефіцієнти Пуассона; α_f , α_m - коефіцієнти термічного розширення; d_f - діаметр волокна; i_f - частота армування (тобто кількість волокон на одиницю ширини перерізу елементарної комірки); c_f – параметр, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон у матеріалі $c_f = i_f V_f / V$ (він називається коефіцієнтом армування або інтенсивності армування композиту, де V – об'єм елементарної комірки КМ ($V = h_0 b_0 l_0$), V_f - об'єм волокна ($V_f = S_f l_0$), S_f – площа перерізу волокна, h_0 , b_0 , l_0 – товщина, ширина, довжина армованої комірки).

Відомо [2], що вміст волокон у матриці може змінюватися у досить широких межах, теоретично досягаючи 91% об'єму комірки. Проте у реальних умовах об'ємна частка волокон у 80% вже призводить до погіршення властивостей волокнистого композиту. Окрім того, у більшості КМ при $c_f > 0,70-0,80$ виявляється схильність до утворення тріщин і розшарувань, тому ці значення прийнято вважати верхньою межею для більшості матеріалів [2]. При дуже малих значеннях c_f

крихкі волокна не можуть обмежити деформацію матриці та руйнуються. При цьому матриця ще має запас міцності та сприймає навантаження. У цьому випадку міцність КМ нижча за міцність неармованої матриці, оскільки наявність волокна рівнозначна введенню в матрицю ниткоподібних пор.

У методиці [15] визначення ефективних характеристик односпрямованого волокнистого КМ реалізується за структурними параметрами компонентів матеріалу на основі відомих мікромеханічних моделей прогнозування фізико-механічних сталих, до яких відносяться [7, 15-22]:

- модель Е. Рейсса і В. Фойгта або правило суміші (Р-Ф),
- модель О.А. Кільчинського, З. Хашіна і Б. Розена (К-Х-Р),
- підхід Д.С. Аболінша (А),
- модель Г.А. Ваніна (В).

Результати чисельних досліджень збіжності та точності розв'язків, що виконані за розробленою методикою з використанням методів прогнозування ефективних пружних характеристик (мікромеханічних методик), для лінійних задач статички згину тонких композитних пластинок наведено в [15]. У цій роботі виконано порівняльний аналіз результатів розрахунку неоднорідних пластин за моментною схемою скінченних елементів та з використанням програмного комплексу NASTRAN [23]. Отримано повний збіг розв'язків.

Зазначимо, що вивчення питань збіжності розв'язків у лінійних задачах дозволяє дослідити основні властивості скінченного елемента та методу розрахунку. Це пов'язано з тим, що методики розв'язування багатьох нелінійних задач звичайно зводяться до багаторазового розв'язання лінеаризованих систем рівнянь, а ефективність цих методик у значній мірі визначається ефективністю та точністю лінійного розрахунку оболонок і пластин. Тому доцільним є починати вивчення питань збіжності та точності розв'язків у першу чергу на лінійних задачах. Ефективність досліджуваних СЕ краще виявляється при розрахунках конструкцій, що чутливі до урахування жорстких зміщень. До цих об'єктів відносяться пластини та оболонки, для яких є характерним наявність відносно великих переміщень при малих деформаціях.

Результати розрахунку та аналіз розв'язків. Застосування в розробленій методиці [12, 13] методів прогнозування ефективних пружних характеристик (мікромеханічних методик) [14, 15] вимагає проведення подальших досліджень по обґрунтуванню використання зазначених методик. У роботі проаналізовано вплив на напружено-деформований стан багатошарових композитних оболонок використання чотирьох різних мікромеханічних моделей прогнозування ефективних

пружних характеристик матеріалу [15]: (P–Ф), (K–X–P), (A), (B). Розрахунки виконано за МССЕ для трьох значень коефіцієнта відносного об'ємного вмісту волокон $c_f=0.35, 0.55, 0.78$. Коефіцієнт армування композиту $c_f=0.35$ відповідає низькій, $c_f=0.55$ – середній, $c_f=0.78$ – високій концентрації волокон.

Розглядаються тонкі пологі квадратні у плані сферичні панелі, що характеризуються параметром кривизни $K = 24$, де $K = 2a^2/(Rh)$ [24], h – товщина, a – розмір у плані, R – радіус серединної поверхні. Оболонки жорстко затиснуті за контуром і навантажені рівномірним нормальним тиском інтенсивністю q .

Розглянуто одно-, дво-, три- та багатошарові оболонки, шари яких виготовлено з волокнистого односпрямованого КМ і мають перехресну схему армування. Шари багатошарової панелі однакової товщини. Взяті такі вихідні дані: $a = 200h$, $h = 1 \text{ см}$, $q = 1 \text{ кг/см}^2$; матеріал – полімерний вуглепластик [7, 15]: епоксидна матриця ЭД-20 $E_m = 3,5 \text{ ГПа}$, $\nu_m = 0,32$; вуглецеві волокна ЛУ-3 $E_f = 250 \text{ ГПа}$, $\nu_f = 0,3$. За розрахункову в усіх випадках приймалася скінченноелементна модель у вигляді чверті оболонки, що має дві площини симетрії, вісь x'' направлена за товщиною.

Розв'язки за МССЕ швидко збігаються. Дослідження їхньої збіжності показало практичний збіг результатів для сіток 8×8 , 12×12 та 16×16 СЕ. За розрахункову прийнято сітку 8×8 СЕ.

Оцінка впливу на напружено-деформований стан панелі використання різних мікромеханічних моделей показала наступне (рис. 1-2).

1. *Одношарова композитна панель*, в якій волокна направлені вздовж осі $x^{2'}$ (рис. 1, а). При низькій $c_f=0.35$, середній $c_f=0.55$ та високій концентрації волокон $c_f=0.78$ використання типу моделі практично не впливає на розв'язки. При високій частці волокон $c_f=0.78$ спостерігається незначна розбіжність розв'язків, найбільше це проявляється для моделі K–X–P. Незначний вплив використовуваних моделей КМ на НДС одношарової оболонки можна мабуть пояснити однорідною за товщиною структурою матеріалу. На рисунках напрямок розташування волокон має відповідні позначення. Розбіг розв'язків вздовж осі $x^{3'}$ можна пояснити наявністю більшої внутрішньої різниці у визначенні величин поперечних ефективних характеристик [див. 15].

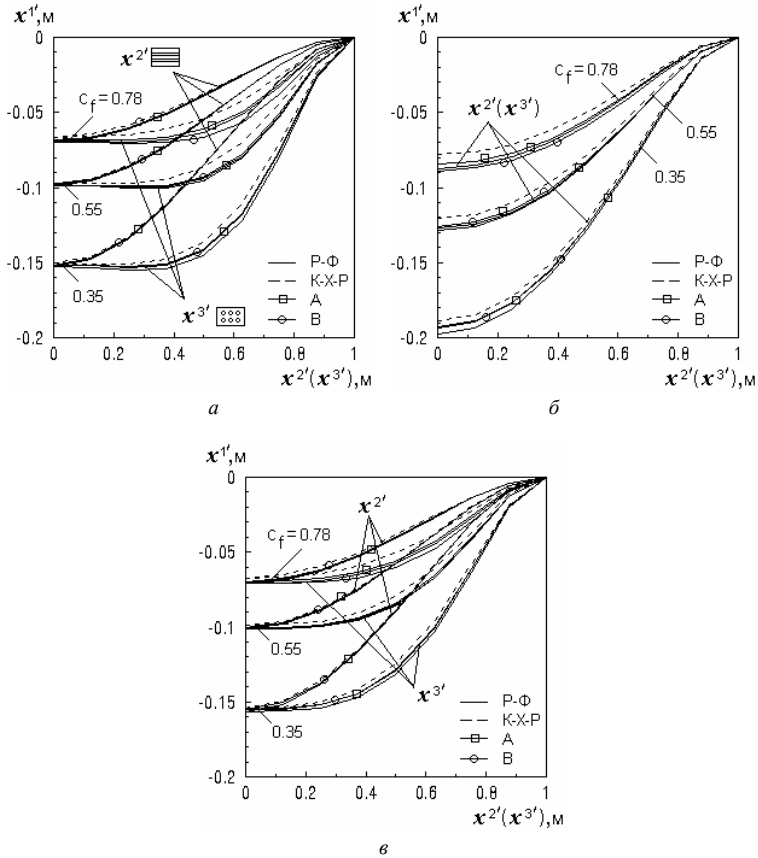


Рис. 1. Форми деформування одношарової, двошарової та тришарової панелей для різного вмісту волокон при використанні чотирьох мікромеханічних методик прогнозування пружних сталей

2. *Двошарова композитна панель*, в якій волокна в шарах направлені перехресно: у першому шарі армування є вздовж осі $x^{2'}$, у другому – вздовж осі $x^{3'}$ (рис. 1, б). Як і очікувалось, оскільки напрямки армування в шарах рівноправні, тому для кожної моделі деформування за осями $x^{2'}$ та $x^{3'}$ є однаковим.

Отримано деякий вплив на НДС двошарової пластинки використання моделі КМ. Використання моделі К-Х-Р для всіх значень c_f підвищує жорсткість панелі, а використання моделі Р-Ф зменшує її жорсткість.

Моделі Аболінша та Ваніна є проміжними. Цей вплив можна мабуть пояснити значними відхиленнями для них величин поперечних ефективних фізико-механічних характеристик, що проявилось при істотній неоднорідності матеріалу за товщиною оболонки.

Зазначимо, що в [15] для відповідної двошарової пластинки ($K = 0$) отримано більш відчутний вплив використання моделі прогнозування пружних сталей на розв'язок задачі.

3. *Тришарова композитна панель*, в якій волокна в шарах направлені перехресно: у першому та третьому шарах – вздовж осі $x^{2'}$, у другому – вздовж осі $x^{3'}$ (рис. 1, в). Для цієї панелі використання методик прогнозування ефективних характеристик практично не впливає на розв'язки – форми деформування збігаються. Як у випадку одношарової оболонки, для моделі К-Х-Р спостерігається незначне відхилення форми деформування в поперечному напрямку від форми, що отримана при використанні інших моделей.

4. *Багатошарова композитна панель*, в якій волокна в шарах направлені перехресно: у непарних шарах – вздовж осі $x^{2'}$, у парних – вздовж осі $x^{3'}$. Розглянуто панель, що складається з 21 шару (рис. 2).

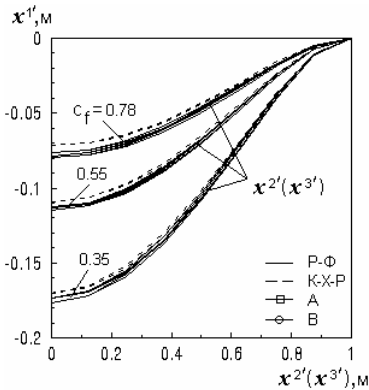


Рис. 2. Форми деформування багатошарової КМ панелі

Для багатошарової оболонки з відповідною концентрацією волокон c_f зіставлення форм деформування показало практично повний збіг розв'язків при використанні різних мікромеханічних методик прогнозування ефективних характеристик КМ. Виняток складає, як і вище, застосування моделі К-Х-Р, яка для всіх розглянутих багатошарових панелей підвищує їхню жорсткість.

Характер деформування багатошарової оболонки відповідає деформуванню панелі з однорідною за товщиною структурою матеріалу, що проявляється збігом форм деформування за осями $x^{2'}$ та $x^{3'}$.

Висновки. Скінченно-елементний метод розв'язання статичних задач щодо геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки оболонок різної форми та структури при дії силових і температурних полів поширено на задачі дослідження тонких

неоднорідних оболонок, шари яких виконані з композитного матеріалу волокнистої структури. Для моделювання термопружних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки застосовано підхід, що базується на структуруванні неоднорідностей матеріалу за товщиною та у плані оболонки за допомогою багат шарового просторового СЕ. У рамках моделі багат шаровий скінченний елемент можна використовувати як СЕ, що дозволяє моделювати матеріал оболонки різними типами традиційних і композитних матеріалів шарів. Визначення ефективних характеристик односпрямованого волокнистого КМ реалізується за структурними параметрами його компонентів на основі відомих мікромеханічних моделей прогнозування фізико-механічних сталих.

Наведено результати чисельних досліджень збіжності розв'язків лінійних задач статки для тонких пологих одно-, дво-, три- та багат шарових композитних панелей. На відміну від шаруватих композитних пластинок ($K = 0$) для пологих панелей з $K = 24$ отримано незначний вплив на їх деформування від застосування моделі прогнозування ефективних пружних сталей при відповідних розглядуваних концентраціях волокон c_f .

Наступним етапом роботи є розв'язання задач нелінійного деформування та стійкості неоднорідних пружних оболонок з композитного матеріалу. Отримані нові результати можуть бути використані при проектуванні елементів несучих оболонкових конструкцій неоднорідної структури.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новые материалы / Колл. авторов. Под научной редакцией Ю.С. Карабасова. – М.: МИСИС, 2002. – 736 с.
2. Юскаев В.Б. Композиційні матеріали: Навчальний посібник. – Суми: Видавництво СумДУ, 2006. – 199 с.
3. Марголін Г.Г. Механіки вивчають композити. – К.: Т-во «Знання» УРСР, 1985. – 48 с.
4. Мелешко А.И., Половников С.П. Углерод. Углеродные волокна. Углеродные композиты. – М.: Сайнс-пресс, 2007. – 192 с.
5. Углеродные волокна и углекомпози́ты: Пер. с англ. / Под ред. Э.Фитцера. – М.: Мир, 1988. – 336 с.
6. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1984. - 264 с.
7. Кучер М.К. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів / М.М. Заравоський, Кучер М.К. // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія Машинобудування. – 2010. – №58. – С.24 – 29.
8. Бондарь В.Г., Бычков С.А., Король В.Н. Решение проблемы создания авиаконструкций из полимерных композиционных материалов на АНТК "Антонов" // Авиационно-

- космическая техника и технология: научно-техн. журнал. Вип. 8(43). Нац. аэрокосмич. ун-г им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Харьков: ХАИ, 2003. – С. 5-13.
9. *Кондратенко А.Н.* Полимерные композиционные материалы в изделиях зарубежной ракетно-космической техники (Обзор) / *А.Н. Кондратенко, Т.А. Голубкова* // Конструкции из композиционных материалов. – 2009. – № 2. – С. 24-35.
 10. *Мэттьюз Ф., Ролингс Р.* Композитные материалы. Механика и технология – М.: Техносфера, 2004. – 407 с.
 11. *Нарусберг В.Л., Тетерс Г.А.* Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. – Рига: Зинатне, 1988. – 297 с.
 12. *Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
 13. *Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
 14. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Мищенко О.О., Калашиников О.Б.* Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. - С. 172-180.
 15. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Мищенко О.О.* Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 92. - С. 30-49.
 16. *Болотин В.В., Новичков Ю.И.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
 17. *Болотин В.В., Новичков Ю.И.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
 18. Композиционные материалы. В 8-ми т./Под ред. *Л.Браутмана и Р.Крока.* / Т. 2. Механика композиционных материалов / Под ред. *Дж.Сендеки.* – М.: Мир, 1978. – 568 с.
 19. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир. – 1982. – 334 с.
 20. *Аболиньш Д.С.* Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала / *Д.С.Аболиньш* // Механика полимеров, 1965. – №4. – С. 52-59.
 21. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971 – 304 с.
 22. *Кильчинский А.А.* Об одной модели для определения термоупругих характеристик материалов, армированных волокнами // Прикл. механика, 1965. – Т.12, №1 – С. 65-75.
 23. *Гоменюк С.И.* Применение различных теорий определения упругих характеристик композиционного материала при расчете конструкций / *С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, В.Е. Ольшанецкий, А.С. Лавренко* // Вестн. двигателестроения. — 2009. — № 2. — С. 139-142.

REFERENCES

1. *Novyie materialyi / Koll. avtorov. Pod nauchnoy redaktsiye Yu.S. Karabasova.* – М.: MISIS, 2002. – 736 p.
2. *Yuskayev V.B.* Kompozytsiini materialy: Navchalnyi posibnyk. – Sumy: Vydavnytstvo SumDU, 2006. – 199 p/
3. *Margolin G.G.* Mehaniki vivchayut kompoziti. – К.: Т-во «Знання» URSR, 1985. – 48 p.
4. *Meleshko A.I., Polovnikov S.P.* Uglerod. Uglerodnyie volokna. Uglerodnyie kompozityi. – М.: Sayns-press, 2007. – 192 p.
5. *Uglerodnyie volokna i uglekompozityi: Per. s angl. / Pod red. E.Fittsera.* – М.: Mir, 1988. – 336 p.
6. *Alfutov N.A., Zinovev P.A., Popov B.G.* Raschet mnogoslownyih plastin i obolochek iz kompozitsionnyih materialov. - М.: Mashinostroenie, 1984. - 264 p.

7. *Kucher M.K.* Otsinka mikromekhanichnykh modelei prohnouzuvannia efektyvnykh konstant pruzhnosti voloknistykh kompozytiv / *M.M. Zarazovskiy, M.K. Kucher* // Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy «Kyivskiy politekhnichnyi instytut». Seriya Mashynobuduvannia. – 2010. – №58. – P. 24 – 29.
8. *Bondar V.G., Byichkov S.A., Korol V.N.* Reshenie problemy sozdaniya aviakonstruktсий iz polimernykh kompozitsionnykh materialov na ANTK "Antonov" // Aviatcionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya: nauchno-tehn. zhurnal. Vip. 8(43). Nats. aerokosmich. un-t im. N.E. Zhukovskogo "HAI". – Harkov: HAI, 2003. – P. 5-13.
9. *Kondratenko A.N.* Polimernyye kompozitsionnyie materialy v izdeliyakh zarubezhnoy raketno-kosmicheskoy tehniki (Obzor) / *A.N. Kondratenko, T.A. Golubkova* // Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov. – 2009. – N 2. – P. 24-35.
10. *Mettyuz F., Rolings R.* Kompozitnyie materialy. Mehanika i tehnologiya – M.: Tehnosfera, 2004. – 407 p.
11. *Narusberg V.L., Teters G.A.* Ustoychivost i optimizatsiya obolochek iz kompozitov. – Riga: Zinatne, 1988. – 297 p.
12. *Bazhenov V. A., Krivenko O. P., Solovei N. A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure [in Ukraine] – ZAT «Vipol», (Kyiv), 2010. – 316 p.
13. *Bazhenov V. A., Krivenko O. P., Solovei N. A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure: Models, Methods, Algorithms, Poorly Studied and New Problems [in Russian]. – Book House "LIBRIKOM" (Moscow), 2013. – 336 p.
14. *Solovei N. A., Krivenko O. P., Mishchenko O.A., Kalashnikov A.B.* Vrakhuвання kharakterystyk kompozytnoho materialu v skinchennoelementnii modeli neodnorodnoi obolonky // Strength of materials and theory of structures. - K.: KNUBA, 2012. - Vol. 89. – P. 172-180.
15. *Solovey M.O., Krivenko O.P., Mischenko O.O.* Vznachennya effektivnih fiziko-mehanichnih kharakteristik odnospryamovanogo voloknistogo kompozitnogo materialu // Strength of materials and theory of structures. – K.: KNUBA, 2013. – Vol. 92. – P. 30-49.
16. *Bolotin V.V., Novichkov Yu.I.* Mehanika mnogoslonyih konstruktсий. – M.: Mashinostroenie, 1980. – 375 p.
17. Kompozitsionnyie materialy. V 8-mi t./Pod red. *L.Brautmana i R.Kroka.* / T. 2. Mehanika kompozitsionnykh materialov / Pod red. *Dzh.Sendetski.* – M.: Mir, 1978. – 568 p.
18. *Kristensen R.* Vvedenie v mehaniku kompozitov. – M.: Mir. – 1982. – 334 p.
19. *Abolinsh D.S.* Tenzor podatlivosti odnonapravleno armirovannogo uprugogo materiala / *D.S.Abolinsh* // Mehanika polimerov, 1965. – N4. – P. 52-59.
20. *Vanin G.A.* Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov. – K.: Naukova dumka, 1971. – 304 p.
21. *Kilchinskiy A.A.* Ob odnoy modeli dlya opredeleniya termouprugih kharakteristik materialov, armirovannyih voloknami // Prikl. mehanika, 1965. – T.12, N1. – P. 65-75.
22. *Homenyuk S.I.* Primenenie razlichnyih teoriy opredeleniya uprugih kharakteristik kompozitsionnogo materiala pri raschete konstruktсий / *S.I. Gomenyuk, S.N. Grebenyuk, V.E. Olshanetskiy, A.S. Lavrenko* // Vestn. dvigatelestroeniya. — 2009. — N 2. — P. 139-142.
23. *Rychkov S.P.* MSC. Visual NASTRAN for Windows – M.: NT Press, 2004. – 552 p.
24. *Vol'mir A.S.* Ustojchivost' deformiruemyh sistem. – M.: Nauka, 1967. – 984 p.

Баженов В.А., Кривенко О.П.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИК ПРОГНОЗИРОВАНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА В КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ОБОЛОЧКИ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрена методика учета в конечноэлементной модели оболочки неоднородной структуры микромеханических параметров компонентов композитного материала, армированного однонаправленными волокнами. Определение эффективных характеристик материала реализуется по структурным параметрам его составляющих на основе известных методик прогнозирования упругих постоянных для данной модели композитного материала. Приведены результаты численных исследований многослойной композитной панели с использованием различных микромеханических методик.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка, многослойный конечный элемент, композитный материал, микромеханические параметры.

Bazhenov V.A., Krivenko O.P.

APPLICATION OF TECHNIQUES FOR PREDICTING ELASTIC PROPERTIES OF THE COMPOSITE MATERIAL IN THE FINITE ELEMENT MODEL OF THE SHELL WITH INHOMOGENEOUS STRUCTURE

The method of accounting of the finite element model of the shell inhomogeneous structure of the micromechanical component parameters of a composite material is considered. By the inhomogeneity of a shell is meant that (i) its thickness is continuously or stepwise variable and (ii) it consists of combinations of multilayer stacks along the thickness and in plan. The casing of the shell and the ribs reinforcing it can consist of an arbitrary number of layers of varying thickness bonded into a single piece. Each layer can be anisotropic and different from the others. Thus, thin multilayer shells of variable thickness and complex geometry are considered as three-dimensional bodies that can be reinforced with ribs and cover plates, weakened by cavities, channels, and holes, and have sharp bends in the mid-surface.

To simulate the elastic properties of a non-uniform shell material, an approach is used that is based on structuring the material inhomogeneities in thickness and in the shell plane using a multilayer spatial finite element. Materials of the shell layers are presented as homogeneous anisotropic materials with specified elastic properties. It is accepted that any layer materials whose elastic properties are set directly as known technical constants are classified as traditional materials. Those materials whose properties are determined through the micromechanical characteristics of their components belong to the class of composite materials.

Determination of the effective characteristics of a composite material reinforced with unidirectional fibers is realized by the structural parameters of its components on the basis of known methods for predicting elastic constants for a given material model. The results of numerical studies of a multilayer composite panel using various micromechanical techniques are presented.

Key words: thin elastic shell, multilayer finite element, composite material, micromechanical parameters.

УДК 539.3

Баженов В.А., Кривенко О.П. «Застосування методик прогнозування пружних характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі оболонки неоднорідної структури» / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 3-15.

Розглянуто методику врахування у скінченноелементній моделі оболонки неоднорідної структури мікромеханічних параметрів складових композитного матеріалу, що армований односпрямованими волокнами.

Табл. 0. Іл. 2. Бібліогр. 24 назв.

Баженов В.А., Кривенко О.П. «Применение методик прогнозирования упругих характеристик композитного материала в конечноэлементной модели оболочки неоднородной структуры» / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА., 2017. – Вып. 98. – С. 3-15. – Укр.

Рассмотрена методика учета в конечноэлементной модели оболочки неоднородной структуры микромеханических параметров компонентов композитного материала, армированного однонаправленными волокнами.

Табл. 0. Ил. 2. Библиогр. 24 назв.

Bazhenov V.A., Krivenko O.P. “Application of techniques for predicting elastic properties of the composite material in the finite element model of the shell with inhomogeneous structure” / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2017. – Issue 98. – P.3-15. – Ukr.

The method of accounting of the finite element model of the shell inhomogeneous structure of the micromechanical component parameters of a composite material reinforced with unidirectional fibers is considered.

Tabl. 0, Fig. 2, Bibliograf. 24 ref.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки БАЖЕНОВ Віктор Андрійович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу

Адреса домашня: 02001 Україна, м. Київ, вул. Заньковецької 30, кв. 22, БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29

Мобільний тел.: +38(050)351-66-21

E-mail: vikabazh@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КРИВЕНКО Ользі Петрівні

Адреса домашня: 03035, Україна, м. Київ, вул. Кудряшова 7-б, кв. 145, КРИВЕНКО Ользі Петрівні

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29

Мобільний тел.: +38(066) 048-32-77

E-mail: olakop@ukr.net

УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИКЛАДАННІ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

В.А. Баженов¹,
д-р техн. наук;

О.В. Шишов¹,
канд. техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Стаття присвячена огляду оригінальних програмних засобів, які розроблено на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА), і протягом багатьох років використовуються у навчальному процесі.

Ключові слова: будівельна механіка, комплекс, тестування, знання, студенти.

Будівельна механіка є однією з базових дисциплін, яка викладається студентам будівельних навчальних закладів при підготовці інженерів-будівельників. Традиційно студентам протягом трьох семестрів читається лекційний курс (102 год.), який підтримується проведенням практичних занять (92 год.) та виконанням прикладів розрахунків напруженого та деформованого стану різноманітних розрахункових схем на статичні та динамічні дії. Для поглиблення знань студентам пропонуються підручники, початкові посібники та методичні вказівки. Як правило, зазначені видання представлено у паперовій формі. На жаль, унаслідок досить швидкого розвитку методів розрахунку та оновлення навчальних планів, ці видання здебільшого відстають від потреб навчального процесу. Отже постає потреба їхнього оперативного коригування, що, порівняно, нескладно зробити при використанні інформаційних технологій.

Вивчення будівельної механіки пов'язане не лише із засвоєнням значного обсягу навчального матеріалу, а, насамперед, з великим обсягом обчислювальної роботи при виконанні навчальних завдань та розрахункових робіт. Тому при викладенні типових розрахунків та виконанні індивідуальних студентських робіт здебільшого розглядаються порівняно прості розрахункові схеми, для аналізу яких достатньо складати і розв'язувати системи рівнянь, що містять, як правило, не більше трьох-п'яти невідомих величин. Застосування програмних засобів дозволяє зменшувати обсяги обчислювальних процедур та аналізувати більш складні схеми. Крім того, використання комп'ютерних технологій

дозволяє індивідуалізувати пред'явлення навчального матеріалу та контролювати процес його засвоєння кожним студентом.

Процес навчання з дисципліни "Будівельна механіка" складається з пред'явлення навчальної інформації, виконання розрахункових робіт, де визначається напружено-деформований стан типових розрахункових схем, та в контролі якості і об'єму засвоєного навчального матеріалу. На кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) комп'ютерні технології застосовуються на всіх зазначених етапах.

Програмні продукти, на яких базується процес навчання, можна поділити на стандартне програмне забезпечення, спеціалізовані навчальні програми, електронні підручники і навчальні посібники, а також широко розповсюджені в проєктній практиці програмні комплекси ЛІРА, SCAD та ін.

Стандартне програмне забезпечення має загальне призначення для всіх користувачів і складається з програмних продуктів, що забезпечують функціонування комп'ютерів (ОС Windows), а також застосовуються для підготовки документації (Microsoft Office, Adobe Reader, архіватори, електронні перекладачі, засоби комп'ютерної графіки).

Спеціалізоване програмне забезпечення навчального процесу по кафедрі будівельної механіки складається з оригінальних прикладних програм, створених викладачами кафедри.

Сюди слід віднести електронний підручник та електронний посібник з будівельної механіки, низку прикладних програм, що призначаються для виконання розрахункових робіт по курсу будівельної механіки, програмний комплекс КОНТРОЛЬ, який здійснює тестування знань студентів, а також програмний комплекс ОЛІМП для проведення предметної олімпіади.

Електронний підручник та електронний посібник. За основу електронного взято підручник [1], до якого внесено деякі зміни.

У підручнику викладено методи розрахунку стержневих та континуальних систем. Він складається з 4 частин, які вміщують 16 розділів:

1. Статика стержневих систем (Розд. 1 – 5).
2. Основи динаміки та стійкості (Розд. 6 – 7).
3. Загальні положення і технологія реалізації методу скінченних елементів (Розд. 8 – 9).
4. Нелінійні задачі та ймовірнісні і експериментальні методи будівельної механіки (Розд. 10 – 16).

Також у підручнику вміщено портретну галерею видатних вчених з будівельної механіки, передбачено можливість виходу до мережі Інтернет та залучення програмного комплексу АСИСТЕНТ.

У перших двох частинах підручник містить класичний курс будівельної механіки, призначений для підготовки бакалаврів будівництва. У третій та четвертій частинах розглянуто спеціальні курси будівельної механіки для магістерської та аспірантської підготовки, а саме: варіаційні принципи і методи будівельної механіки, фізично, геометрично і конструктивно нелінійні задачі, основи надійності споруд, задачі статистичної динаміки, експериментальні методи будівельної механіки тощо.

Навігація по тексту підручника здійснюється за допомогою гіперпосилань та закладок.

На титульній сторінці електронного підручника (рис.1) розташоване перше гіперпосилання – його заголовок. Натиснення на заголовок виводить на екран короткий зміст підручника. Кожен рядок у змісті підручника являє собою назву однієї з глав і у свою чергу є гіперпосиланням. Натиснення на нього призводить до переходу до відповідної глави.

Кожна глава починається з переліку параграфів. Назви параграфів – це також гіперпосилання. Крім того, у текстах глав розташовані гіперпосилання на формули, рисунки, параграфи даної глави або інших глав підручника. Гіперпосилання у текстах глав виділено синім кольором і підкресленням.

Назви глав у тексті підручника також є гіперпосиланнями. Натиснення на них повертає на екран короткий зміст підручника.

Короткий зміст підручника дублюється закладками, які розташовані у лівому вертикальному меню закладок (Bookmakers).

Пересування по підручнику можливо також звичайними способами – за допомогою лінійки прокрутки і за допомогою клавіш керування курсору та клавішею Enter. Якщо комп'ютер підключено до мережі Інтернет, то можна отримувати історичні відомості, натискаючи на портрети у Портретній галереї вчених.

На рис. 2 представлено фрагмент сторінки однієї з глав.

Безпосередньо з тексту підручника можна залучати до роботи програмний навчальний комплекс АСИСТЕНТ, у якому зібрано прикладні програми для виконання розрахункових робіт з будівельної механіки, а також для розрахунку плоских стержневих систем на статику, динаміку та стійкість. Для цього необхідно, щоби на комп'ютері у кореновому каталозі логічного диска D: було заздалегідь встановлено папку ASSISTANT із зазначеним комплексом. Безпосередньо з тексту підручника можна залучати до роботи демо-версію програмного комплексу SCAD за умови, що цей комплекс попередньо встановлено на комп'ютері.

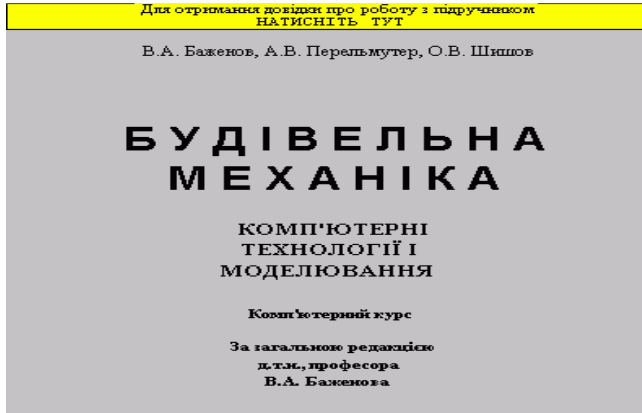


Рис. 1

Рис. 2

Електронний підручник являє собою файл формату PDF (Portable Document Format) обсягом 41,9 Мб.

Крім підручника, створено електронний навчальний посібник з будівельної механіки на базі посібника [2], Так само як і електронний підручник, посібник виконано у форматі PDF. Посібник складається з 18 глав, де наводяться приклади розрахунків типових розрахункових схем (ферми, балки, арки, рами) на статичні та динамічні дії різними методами. На рис. 3 показано титульну сторінку, а на рис. 4 – фрагмент однієї сторінки. Підручник займає 9,4 Мб дискового простору.

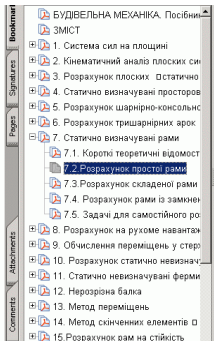
В.А. Баженов, Г.М. Іванченко,
О.В. Шишов, С.О. Пискунов

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Розрахункові вправи. Задачі.
Комп'ютерне тестування

Навчальний посібник

Рис. 3



7.2. Розрахунок простої рами

Розрахункова схема рами представлена на рис. 7.2.а. Необхідно виконати статичний розрахунок рами, тобто побудувати епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N .

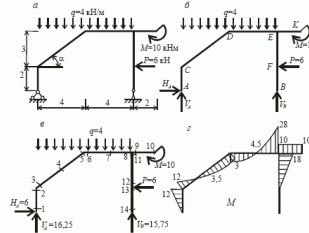


Рис. 4

Програмний комплекс АСИСТЕНТ (рис. 5,а). Спеціалізоване програмне забезпечення, що призначається для виконання розрахункових робіт, виконання курсових та дипломних проектів об'єднано в програмному навчальному комплексі АСИСТЕНТ (19 прикладних програм). Тут зібрано комп'ютерні програми, які реалізують розрахунки різного виду стержневих систем на статику, динаміку та стійкість, а також прикладні допоміжні програми, що реалізують деякі методи лінійної алгебри, які найчастіше використовуються при розв'язанні задач будівельної механіки. Комплекс призначено для роботи в ОС Windows і може бути встановлений в кореневих каталогах будь-яких логічних дисків як в комп'ютерних класах, так і на комп'ютерах окремих користувачів.

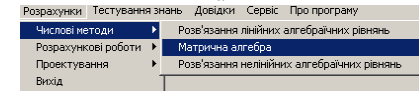
Усі прикладні програми комплексу можна розділити на наступні види.

- **Числові методи.** Тут зібрано програми з розв'язання систем лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь а також програми, що реалізують ті чи інші методи роботи з числовими матрицями (складання, множення, транспонування, обернення тощо).
- **Розрахункові роботи.** Зазначені програми призначено для виконання розрахункових робіт, які виконують студенти спеціальностей ПЦБ та МБ: "Розрахунок тришарнірної арки", "Розрахунок плоскої ферми", "Розрахунок нерозрізної балки", "Розрахунок плоскої стержневої системи методом скінченних елементів", "Динамічний розрахунок рами", "Розрахунок рамної системи на стійкість". Усі програми базуються на єдиній методиці, за якою студент виконує певні фрагменти розрахунку заданих схем. Програма перевіряє правильність результатів розрахунку зазначених фрагментів і, у разі правильності, видає результати розрахунків аналогічних фрагментів. У разі наявності в "ручному" розрахунку помилки програма виконує послідовний аналіз проміжних числових результатів і в режимі діалогу допомагає студенту знайти та виправити припущену помилку. Такий підхід, з одного боку, звільняє студента від великого обсягу рутинних числових процедур, а з іншого – гарантує правильність результатів. Результати розрахунку виводяться у робоче вікно програми у графічному вигляді (епюри, графіки, форми коливальності тощо) та у вигляді числових результатів. Останні можуть бути виведені на принтер. Зауважимо, що кожна з прикладних програм для виконання розрахункових робіт має свою власну базу розрахункових схем, які індивідуалізуються завдяки можливості варіювання геометричних розмірів і величин навантажень.
- **Проектування.** Тут розташовано три прикладні програми, які можна використовувати при виконанні курсових та дипломних проектів. Це, насамперед, програма статичного розрахунку плоских стержневих систем на будь-які силові дії, програма розрахунку на динамічні дії зосереджених сил та моментів та програма розрахунку на стійкість рамних систем від дії вузлових сил. Тут на відміну від програм попереднього типу необхідно створювати вхідну інформацію. Під час роботи програми не задають контрольних запитань, а виводять на монітор графічні та числові результати, які можна роздрукувати.
- **Допоміжні програми.** Використовуються в міру необхідності при виконанні як розрахункових так і проектних робіт. Це спеціалізований калькулятор, коефіцієнти спеціальних функцій для розрахунку стержневих систем методом переміщень тощо.
- **Короткий довідник** з будівельної механіки дозволяє оперативно переглядати основні поняття та співвідношення будівельної механіки.

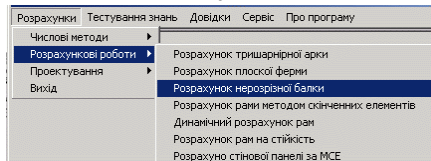
- **Тестування знань.** Дозволяє користувачу самостійно перевіряти свої знання з основних тем будівельної механіки.



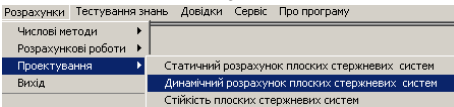
а



б



в



г

Рис. 5

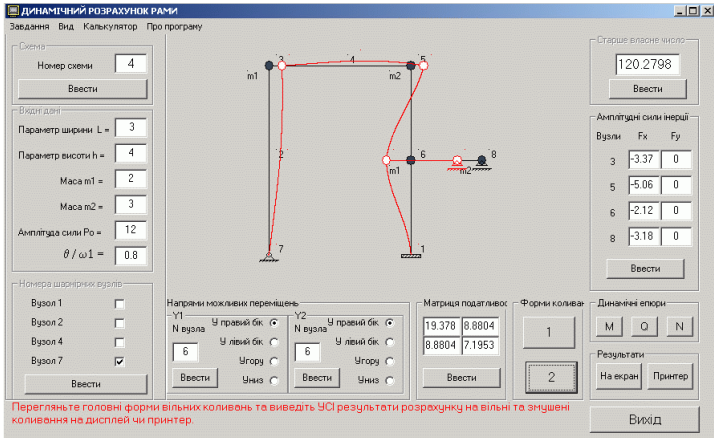
Керування роботою комплексу здійснюється за допомогою спадного меню, розташованих у верхньому рядку його робочого вікна (рис. 5).

Вибір курсором миші того чи іншого пункту меню призводить до розкриття підменю програмних засобів, призначених для тих чи інших дій. Так вибір пункту **Розрахунки** розкриває підменю нижчого рівня, де прикладні програми згруповано за функціональними ознаками. При цьому у робоче вікно комплексу виводиться список прикладних програм, що реалізують розв'язання задач відповідного розділу.

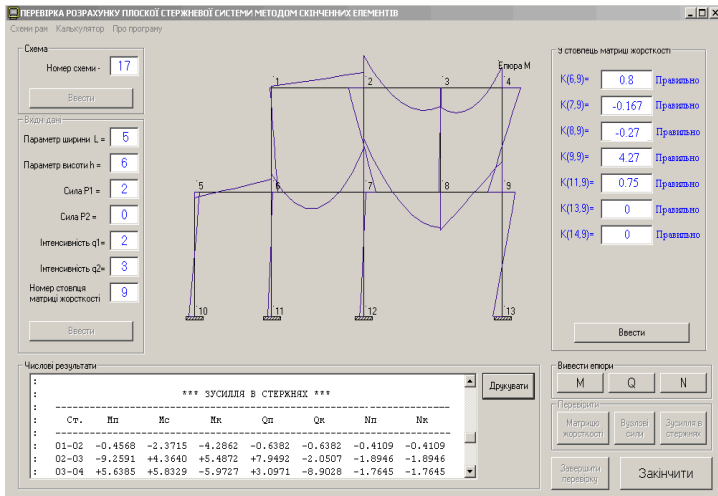
Зокрема, вибір пункту **Числові методи** (рис.5,б) дозволяє розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь, задачі матричної алгебри (додавання, віднімання, множення,

транспонування матриць, обчислення визначників та власних значень тощо), обчислювати дійсні корені алгебраїчних нелінійних рівнянь.

Вибір пункту **Розрахункові роботи** виводить в робоче вікно список прикладних програм для виконання розрахункових робіт по курсу будівельної механіки (рис. 5,в). Як було зазначено, усі програми розділу засновані на сполученні "ручних" і комп'ютерних розрахунків.



а



б

Рис. 6

Як приклад показано робочі вікна програм динамічного розрахунку рами (рис. 6,а) та розрахунку рам методом скінчених елементів (рис. 6,б) після введення початкових даних і результатів "ручних" розрахунків, коли всі перевірки пройдені успішно. Зауважимо, що кожна з прикладних програм для виконання розрахункових робіт має свою власну базу розрахункових схем, які індивідуалізуються завдяки варіюванню геометричних розмірів і величин навантажень.

Вибір пункту **Проектування** (рис. 5,2) дозволяє завантажувати прикладні програми для розрахунку будь-яких плоских стержневих систем на статику, динаміку та стійкість. Програми призначено для розрахунку порівняно не надто складних схем, які зустрічаються при виконанні курсових і дипломних проектів, і видають графічні та числові результати без проміжних перевірок.

Як було зазначено, комплекс АСИСТЕНТ вміщує також допоміжні програми: спеціалізований калькулятор, електронний короткий довідник з будівельної механіки, програму тестування тощо.

Програмний комплекс АСИСТЕНТ і електронний підручник можуть бути встановлені на комп'ютер окремо і функціонувати автономно. Якщо ж на комп'ютері встановлено обидва програмні продукти, то з електронного підручника можна безпосередньо звертатись до комплексу АСИСТЕНТ. Отже, підручник та навчальний комплекс фактично утворюють єдину систему.

Тестування. Для поточного і модульного контролю знань студентів використовується розроблений на кафедрі програмний комплекс КОНТРОЛЬ. Комплекс призначений для роботи в мереженому режимі. Всі програми і файли комплексу розташовані на кафедральному сервері, а всі комп'ютери локальної мережі відіграють роль робочих станцій.

Сервер дозволяє користувачам локальної мережі мати доступ до файлів, розміщених на носіях інформації сервера. У процесі роботи частина логічного дискового простору робочої станції є відображенням частини дискового простору сервера. Основна обробка і пошук інформації для користувача будь-якої робочої станції здійснюється на сервері. Функції клієнтської частини на робочій станції зводяться до введення даних і відображення результатів. Таким чином, робоча станція (комп'ютер користувача) лише забезпечує доступ до обчислювальних

ресурсів сервера, тобто працює в режимі віддаленого терміналу.

На рис. 7 представлена титульна сторінка комплексу. Керування роботою здійснюється через спадні меню. Так, на рис. 8 показано вибір теми тестування через меню **Тема**.



Рис. 7

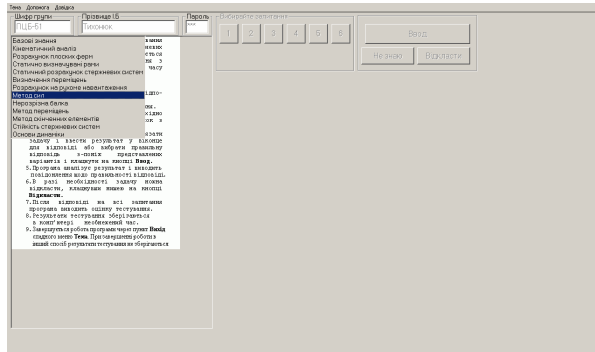


Рис. 8

Головне вікно програми може мати два вигляду. Вигляд автоматично вибирається програмою залежно від виду відповіді на тестове запитання. Так, якщо відповідь на тестове запитання повинна бути вибране зі списку пропорованих, тобто носить вибірковий характер (це, як правило, теоретичні запитання), вікно набуває вигляд, показаний на рис. 9,а.

Якщо ж відповідь має фіксований характер (як правило, це числовий результат розрахунку, який необхідно виконати в процесі тестування), то головне вікно автоматично перебудовується до вигляду, представленого на рис. 9,б.

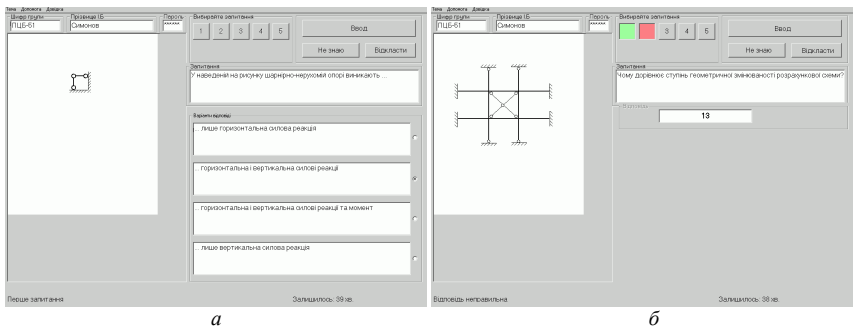


Рис. 9

Матеріал дисципліни "Будівельна механіка" розбитий на 13 модулів (тем). Тестування здійснюється перевіркою відповідей на тестові білети для вибраної теми. Білети з обраної теми вибираються програмою випадковим чином, причому програма відстежує номери білетів, що пред'являлися даному користувачеві при попередніх тестуваннях і не допускає їх повторного пред'явлення.

Кількість запитань у тестовому білеті може коливатися від 5 до 12. Введені відповіді аналізуються програмою шляхом порівняння з еталонними відповідями. Наприкінці тестування програма повідомляє інтегральну оцінку знань з вибраної теми.

Отже комплекс виконує наступні дії.

- Дозволяє студенту вибрати певну тему для тестування.
- Вибирає випадковим чином тестовий білет для вибраної теми.
- Дає студенту можливість вибирати у будь-якому порядку питання білета і виводить на екран тестові запитання, рисунки і, у разі потреби, варіанти можливих відповідей.
- За певними правилами підраховує кількість набраних балів і залежно від їхньої кількості виставляє оцінку знанням і умінням студента з обраної теми.
- Дозволяє в процесі тестування запускати допоміжні програми (калькулятор, програму розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, короткий довідник з будівельної механіки і т.п.). Ці програми запускаються безпосередньо з головного вікна програми за допомогою спадних меню.
- Автоматично створює, зберігає і оновлює файли результатів студентів (рис. 10), файли статистики для кожної академгрупи (рис. 11), а також файл загальної статистики для всіх академгруп.
- Відстежує своєчасність проведення тестування і автоматично знижує оцінку, якщо тестування відбувається пізніше визначеного терміну.

У результаті використання комп'ютерних технологій, по-перше, ускладнюються розрахункові схеми без значного збільшення трудомісткості, по-друге, підвищується достовірність результатів і, нарешті, по-третє, студенти опановують основні прийоми роботи з сучасними промисловими програмними комплексами, без яких на теперішній час не обходиться розробка проектів інженерних споруд.

ПРОТОКОЛ ТЕСТУВАННЯ ЗНАТЬ		
Дисципліна БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА		
29.10.2016 14:35:27		
Тема: Кінематичний аналіз		
Тестовий білет: КА_44_А		
Група ПЦБ-31		
Студент Симонов		
N зав.	Бали	Відповідь
1	5	2
2	1	-13
3	5	3
4	0	
5	2	0
Сумарна кількість балів 16 (64%)		
Оцінка ЗАДОВІЛЬНО		
Використаний час: 16 завтл. 22 сек.		
ОК		

Рис. 10

Результати тестування														
#Студенти	Теми:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Баблев Д.		5	5			5	5							
Брежанко І.О.		5				5								
Богданов С.І.		5	5											
Грищенко О.О.		5	5			5	5							
Драпей Д.Ю.		3				3	4							
Іванченко А.А.		5				5	5							
Іванов Є.В.		2	3			2	2							
Коник Ч.М.		5				5	5							
Левченко Е.А.		5				5	5							
Лькіна К.П.		5				5	5							
Овчеренко Д.О.		5				5	3							
Смильда А.О.		5				5	5							
Павлюк Р.П.		5				5	5							
Пасічник Я.В.		4				5	4							
Платорюк С.		5	5			5	4							
Пляшак В.В.		5				5	5							
Пляченко В.В.		3				3	4							
Ротцішак В.В.		5				5	5							
Рокогон М.С.		4	5			5	5							

Рис. 11

Предметна олімпіада. Предметні олімпіади з навчальних дисциплін є одним із дієвих засобів виявлення найбільш обдарованих студентів, які ставляться до даної дисципліни із зацікавленістю і виявляють потяг до більш глибокого засвоєння матеріалу.

На кафедрі будівельної механіки створена і апробована комп'ютерна програма OLYMP, яка автоматизує процедуру олімпіади з будівельної механіки. Програма призначена для проведення предметної олімпіади з будівельної механіки лише в комп'ютерних класах кафедри, які об'єднані комп'ютерною мережею. Власне програма розміщується на кафедральному сервері, і жоден із студентів, що беруть участь у олімпіаді, доступу до неї немає і, отже, не може втручатися в її роботу.

Програма пропонує учасникам ряд задач підвищеної складності з ряду тем курсу будівельної механіки. Задачі, тобто схеми, запитання та відповіді, готуються викладачами кафедри заздалегідь і заносяться у вигляді файлів певного формату до сервера.

На рис. 12 показано головне вікно програми, а на рис.13 – головне вікно в процесі роботи.

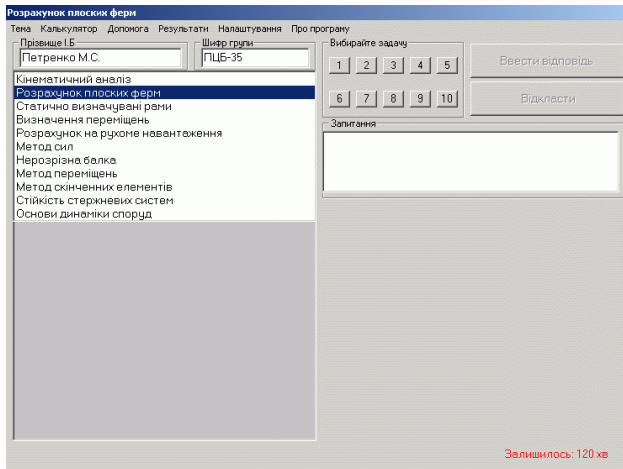


Рис. 12

Робота програми ОЛІМП багато в чому подібна до програми КОНТРОЛЬ, проте має певні особливості.

- Кількість учасників обмежується числом комп'ютерів, що підключено до локальної мережі.

- Програма надає можливість кожному учаснику вибирати задачі будь-які задачі з будь-яких тем, переглядаючи їхні умови і вибирати задачі для розв'язання.

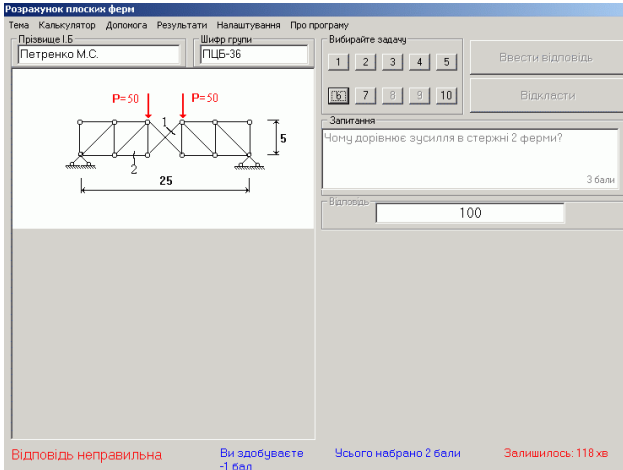


Рис. 13

- У кожній темі міститься до 10 оригінальних задач.
- У процесі сеансу олімпіади кожен учасник може переходити від однієї задачі до іншої задачі і від однієї теми до іншої. Кількість переходів не обмежується.
- Після введення відповіді для обраної задачі програма повідомляє щодо правильності і блокує цю задачу для даного учасника задля виключення повторного звернення до неї.
- За правильне розв'язання кожної задачі учаснику нараховується певна кількість балів (від 3 до 9 – залежно від складності задачі). "Вартість" задачі повідомляється в умові. Програма підраховує кількість балів, набрану кожним учасником, і оперативно інформує їх про це.
- Якщо відповідь неправильна, то програма зменшує кількість набраних учасником балів на одиницю.
- Програма відстежує час тривалості сеансу олімпіади та інформує учасників щодо часу, який залишається до її закінчення..
- Програма надає можливість учасникам використовувати допоміжні програми – програмний калькулятор, програму розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, програму обчислення спеціальних функцій при розрахунку стержневих систем на стійкість, короткий електронний довідник з будівельної механіки.

- Після завершення сеансу програма сортує результати і видає на монітор та на принтер список учасників у порядку набраних балів і, отже, зайнятих ними місць. Це означає, що результати олімпіади стають відомими одразу після її завершення.
- Крім загальних результатів олімпіади, програма зберігає результати про кількість балів, набраних при розв'язанні всіх задач для кожного учасника.
- Налаштування роботи програми (тривалість сеансу, перелік тем і т.п.) виконується викладачем, відповідальним за проведення олімпіади, перед її початком за допомогою самої програми.
- Для підготовки олімпіади розроблена спеціальна програма, яка створює файли олімпіадних задач і необхідні схеми у відповідних форматах.

Приклад загального списку результатів олімпіади показано на рис. 14.

Олімпіада з дисципліни <БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА>						16.03.2016
Студент	Група	Усього балів	% прав	Набрано		
1. ДІДУХ	пцб-39а	108	72.22	78		
2. Хоптій Катерина Васи	пцб-33	106	70.75	73		
3. Грищенко Д.О.	пцб - 36	101	70.29	71		
4. Дамнаті І. Р.	пцб-35	91	76.92	70		
5. Побережний Сергій	пцб-34	145	46.20	67		
6. Мартиновський В.О.	пцб - 38	101	63.36	64		
7. Супрунович Андрій Ол	пцб 36	94	65.95	62		
8. Ткач Іван Валерійови	пцб-38	121	49.58	60		
9. Нестеренко О.М	пцб-34	117	38.46	45		
10. Борисюк В.І.	пцб-39а	93	45.16	42		
11. Мельник А.О.	пцб-33	77	51.94	40		
12. Волосевич А.В	пцб-35	40	75	30		
13. Турчин В.О.	37	54	31.48	17		
14. Гришай Ілія Вікторів	пцб-37	31	41.93	13		
15. Охріменко Б.С.	пцб-39а	96	11.45	11		
16. Свтух Андрій Іванови	пцб-34	68	11.76	8		
17. Туманов	пцб-39	29	17.24	5		
18. Бундзяк в.в.	36	51	0	0		

Рис. 14

На завершення слід відзначити, що робота кафедри будівельної механіки КНУБА із впровадження інформаційних технологій у навчальний процес триває.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання. Підручник - К.: ВІПОЛ, 2013. – 896 с.
2. *Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В., Пискунов С.О.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2010 р. – 504 с.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Perelmuter A.V., Shishov O.V.* Budivel'na mehanika. Komp'yuterni tehnologiyi i modelyuvannya (Structural mechanics. Computer technology and simulation). Pidruchny'k - K.: VIPOL, 2013. - 896 p.
2. *Bazhenov V.A., Ivanchenko G.M., Shishov O.V., Piskunov S.O.* Budivel'na mexanika. Rozрахunkovi vpravu'. Zadachi. Komp'yuterne testuvannya (Structural mechanics. Estimated Exercise. Tasks Computer testing). - Navchal'ny'j posibny'k. - K.: Caravela, 2010. - 504 p.

Bazhenov V.A., Shishov O.V.

APPLICATION OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN CONDUCTING STRUCTURAL MECHANICS

The article is devoted to the review of the original software tools developed at the Department of Construction Mechanics of the Kiev National University of Construction and Architecture (KNUBA) and for many years used in the educational process.

Key words: structural mechanics, complex, testing, knowledge, students.

Баженов В.А., Шишов О.В.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Статья посвящена обзору оригинальных программных средств, разработанных на кафедре строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры (КНУСА), и в течение многих лет используются в учебном процессе.

Ключевые слова: строительная механика, комплекс, тестирование, знания, студенты.

УДК 539.3

Баженов В.А., Шишов О.В. **Застосування інформаційних технологій при викладанні будівельної механіки** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 16-30.

Стаття присвячена огляду оригінальних програмних засобів, які розроблено на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури.

Табл. 0. Іл. 14. Бібліогр. 2.

Bazhenov V.A., Shishov O.V. **Application of information technologies in the teaching of building mechanics** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – P. 16-30.

The article is devoted to the review of the original software tools developed at the Department of Construction Mechanics of the Kiev National University of Construction and Architecture.

Table 0. Fig. 14. Ref. 2

Баженов В.А., Шишов О.В. **Применение информационных технологий в преподавании строительной механики** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 16-30.

Стаття присвячена огляду оригінальних програмних засобів, які розроблено на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури.

Табл. 0. Іл. 14. Бібліогр. 2.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *д-р техн. наук, професор, академік НАПНУ, директор НДІ будівельної механіки БАЖЕНОВ Віктор Андрійович*

Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, КНУБА, БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу*

Робочий тел.: *+38(044) 245-48-29*

Мобільний тел.: *+38(050)351-66-21*

E-mail: *vikabazh@ukr.net*

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ШИШОВ Олег Володимирович*

Адреса робоча: *03680, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, КНУБА, ШИШОВУ О.В.*

Робочий тел.: *+38(044) 2415549*

Мобільний тел.: *+38(066) 7855419*

E-mail: *shishovov@ukr.net*

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ G-ІНТЕГРАЛА НА ОСНОВІ ОБЧИСЛЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ОБ'ЄМНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ РЕАКЦІЙ**О.О. Шкриль¹,**
канд. техн. наук¹*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

На основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій, розроблено метод визначення параметра Гріффітца G в дискретних моделях методу скінченних елементів (МСЕ). Розв'язані тестові задачі. Отримані результати підтверджують ефективність методики.

Ключові слова: напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), параметр Гріффітца, метод реакцій.

Вступ. Серед методів визначення параметрів механіки руйнування на основі МСЕ найбільшого поширення набули енергетичні підходи. На сьогоднішній день проведені чисельні дослідження, які показали ефективність методу реакцій в реалізації енергетичного підходу. Проте в зазначених дослідженнях розглядається питання визначення J -інтеграла Черепанова-Райса [1-3]. Загально відомо, що при наявності об'ємних сил різної природи J -інтеграл не можна використовувати для оцінки тріщиностійкості. Тому в даній статті проводиться узагальнення методу реакцій для визначення критерія Гріффітца G , який дозволяє оцінювати тріщиностійкість при дії об'ємних сил різної природи.

1. Вихідні енергетичні співвідношення Гріффітца. Для утворення нової поверхні тріщини повинна виконуватись наступна енергетична залежність: [4,7]

$$\frac{d}{dS}(U - F + W) = 0, \quad (1)$$

де U - пружня енергія тіла; F - робота зовнішніх сил; W - енергія, що потрібна для утворення нової поверхні тріщини dS .

Якщо із запису (1) виразити інтенсивність енергії, що звільнюється при утворенні нової поверхні тріщини, то ми отримаємо параметр Гріффітца G :

$$G = \frac{dW}{dS} = \frac{d}{dS}(F - U). \quad (2)$$

Робота зовнішніх сил та потенційної енергії деформації визначаються за відомими формулами в термінах переміщень:

$$F = \bar{P}^T \bar{\Delta}, \quad U = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{1}{2} \bar{P}^T \bar{\Delta}. \quad (3)$$

2. Подання вихідних співвідношень для дискретних моделей МСЕ.

В дискретних моделях МСЕ, що складається з n вузлів, визначення роботи зовнішніх сил виконується за відповідними величинами вузлових навантажень та переміщень:

$$F = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i^T \bar{\Delta}_i, \quad (4)$$

де $\bar{P}_i^T = \{P_1 \ P_2 \ P_3\}_i$ - вектор зовнішніх сил в i -тому вузлі, $\bar{\Delta}_i = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3\}_i^T$ - вектор переміщень в i -тому вузлі.

Виходячи з умов рівноваги, реакції що виникають у вузлах дискретної моделі повинні врівноважувати зовнішні сили:

$$\bar{P}_i^T = \bar{R}_i^T = \{R_1 \ R_2 \ R_3\}_i.$$

Тому формули (3) в дискретних моделях МСЕ можна подати через вузлові величини реакцій та переміщень:

$$F = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i^T \bar{\Delta}_i, \quad U = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{R}_i^T \bar{\Delta}_i}{2}. \quad (5)$$

Дискретний аналог формули (2) при СЕ дискретизації набуває вигляду :

$$G = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{\Delta F - \Delta U}{\Delta S}. \quad (6)$$

Для реалізації формули (6) в дискретних моделях розглянемо просторове тіло об'ємом V з тріщиною в двох рівноважних станах, вздовж фронту якої виділимо деякий замкнутий об'єм v (рис. 1).

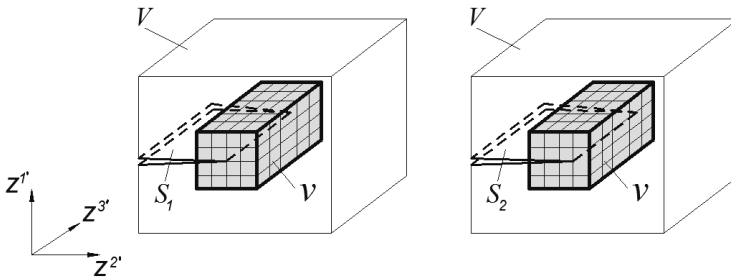


Рис. 1. Об'єм інтегрування навколо тріщини

Передбачається, що поверхня тріщини S проходить по граням CE , а лінія фронту - по ребрам CE з тріщиною. Перший стан відповідає початковому положенню тріщини, другий - новому положенню,

отриманому при зростанні тріщини на один крок сітки із виникненням нової поверхні тріщини ΔS (рис. 2).

Введемо наступні позначення: $\{u_V^I\}$, $\{u_V^{II}\}$ – вектори вузлових переміщень, $\{R_V^I\}$, $\{R_V^{II}\}$ – вектори вузлових реакцій, $[K_V^I]$, $[K_V^{II}]$ – матриці жорсткості СЕМ всього тіла в першому та другому стані. Із врахуванням прийнятих позначень запишемо формулу визначення приросту енергії, що потрібна для утворення нової поверхні тріщини в дискретних моделях:

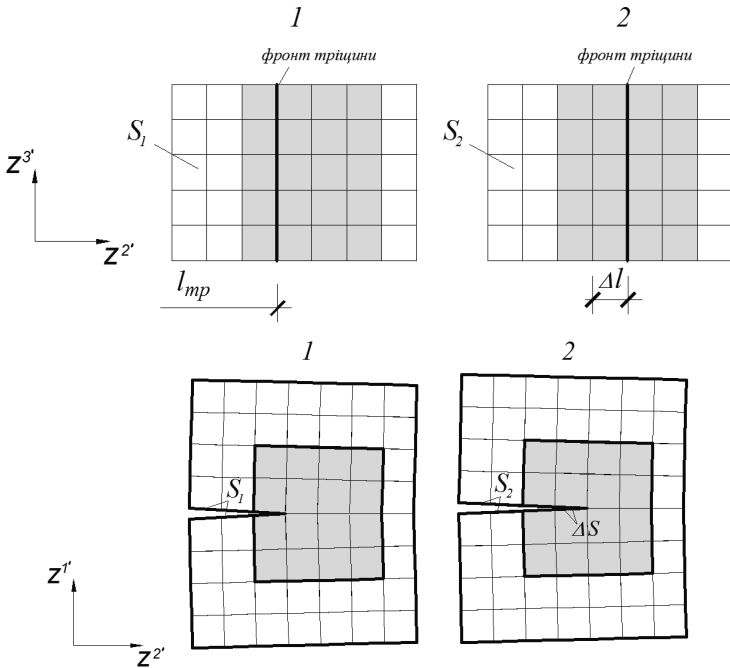


Рис. 2. Приріст тріщини в дискретній моделі.

$$\Delta W = \Delta F - \Delta U = \{R_V\}^T \Delta u_V - \Delta U_V, \quad (7)$$

де:

$$\begin{aligned} \{R_V\} &= \frac{1}{2} (\{R_V^I\} + \{R_V^{II}\}), \quad \Delta u_V = \{u_V^{II}\} - \{u_V^I\}, \\ \Delta U_V &= U_V^{II} - U_V^I = \frac{1}{2} (\{R_V^{II}\}^T \{u_V^{II}\} - \{R_V^I\}^T \{u_V^I\}). \end{aligned}$$

Підставивши вирази (7) в (6), одержимо формулу визначення параметра Гріффітца із використанням всіх вузлів дискретної моделі тіла:

$$G = \frac{\{R_v\}^T \Delta u_v - \frac{1}{2} \left(\{R_v^{II}\}^T \{u_v^{II}\} - \{R_v^I\}^T \{u_v^I\} \right)}{\Delta S}. \quad (8)$$

Існуючі методи для обчислення G в дискретних моделях виділяють певну область навколо фронту тріщини. Тому за аналогією виведемо формулу визначення G розглядаючи не всю дискретну модель, а лише частину у вигляді замкнутого об'єму v довільної конфігурації.

Покажемо, що для будь-якої частини СЕМ тіла об'ємом V_N , яка не містить тріщину, буде справедливою наступна енергетична рівність:

$$\Delta W_{V_N} = \frac{1}{2} \left(\{R_{V_N}^I\} + \{R_{V_N}^{II}\} \right)^T \left(\{u_{V_N}^{II}\} - \{u_{V_N}^I\} \right) - \frac{1}{2} \left(\{R_{V_N}^{II}\}^T \{u_{V_N}^{II}\} - \{R_{V_N}^I\}^T \{u_{V_N}^I\} \right) = 0. \quad (9)$$

Після перемноження реакцій на відповідні переміщення і додавання подібних складників запис набуде наступного вигляду:

$$\Delta W_{V_N} = \frac{1}{2} \left(\{R_{V_N}^I\}^T \{u_{V_N}^{II}\} - \{R_{V_N}^{II}\}^T \{u_{V_N}^I\} \right).$$

Представимо вектори реакцій через вузлові переміщення, враховуючи що матриці жорсткості дискретної моделі в обох станах однакові:

$$\Delta W_{V_N} = \frac{1}{2} \left(\{u_{V_N}^I\}^T [K_{V_N}] \{u_{V_N}^{II}\} - \{u_{V_N}^{II}\}^T [K_{V_N}] \{u_{V_N}^I\} \right) = 0.$$

Із енергії ΔW виразу (8), яка обчислюється для всієї дискретної моделі, можна відняти вираз типу (9), що буде обчисленим для довільного об'єму дискретної моделі без тріщини. Позначаючи v довільний об'єм СЕМ тіла, в якому міститься фронт тріщини в обох її станах на основі (8),(9) маємо:

$$G = \frac{1}{2\Delta S} \left(\left(\{R_v^I\} + \{R_v^{II}\} \right)^T \left(\{u_v^{II}\} - \{u_v^I\} \right) - \{R_v^{II}\}^T \{u_v^{II}\} + \{R_v^I\}^T \{u_v^I\} \right). \quad (10)$$

При незмінності матриці жорсткості фрагмента об'ємом v в обох розглядуваних станах, формула визначення G (10) набуває спрощеного вигляду:

$$G = \frac{1}{2\Delta S} \left(\{R_v^I\}^T \{u_v^{II}\} - \{R_v^{II}\}^T \{u_v^I\} \right). \quad (11)$$

3. Апробація методики на двовимірних тестових задачах.

Апробація розробленої методики була проведена на тестовій задачі про розтяг нескінченної пластини з центральною тріщиною (рис. 3,а).

Вихідні дані: $\sigma = 1 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, $E = 1 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, $\nu = 0$, $l = 3 \text{ мм}$. Враховуючи симетрію,

розглядалась чверть пластини (рис. 3,б,в). На першому етапі проводилось дослідження потрібних розмірів дискретної моделі b , при яких напружено-деформований стан в околі вершини тріщини буде відповідати нескінченній пластині.

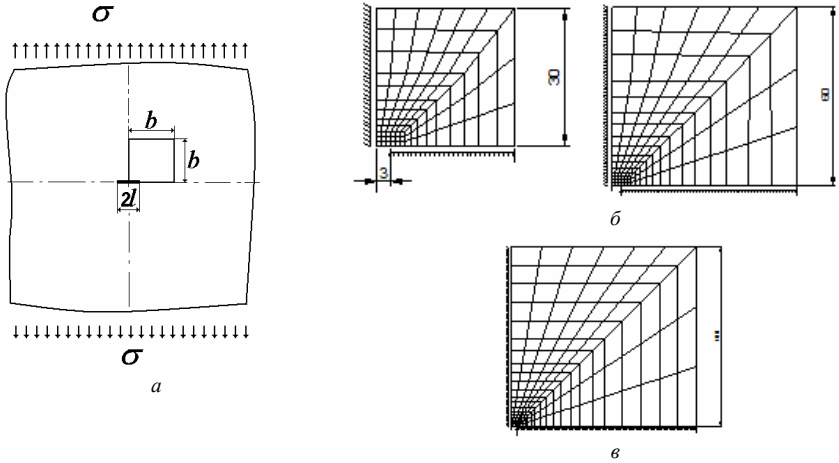


Рис. 3. Нескінченна пластина з центральною тріщиною (а) та її дискретні моделі (б,в)

Результати показали, що при розмірах $b=100\text{мм}$ збіжність НДС досягнуто. На другому етапі було проведено дослідження збіжності за розмірами SE в привершинному фрагменті. Результати показали (рис. 5), що збіжність досягається при розмірах SE в 10 разів меншими від довжини тріщини (рис. 4).

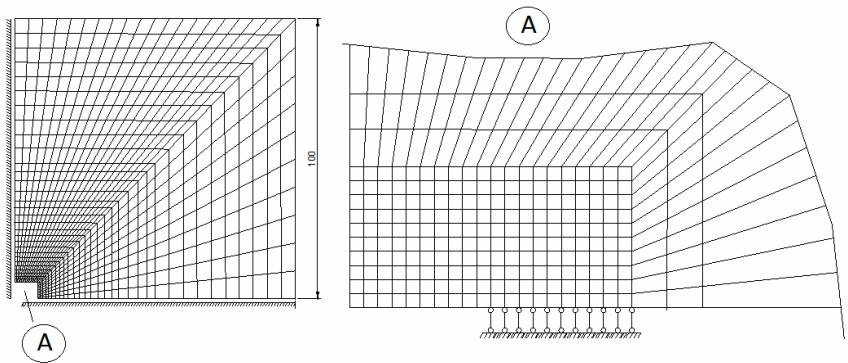


Рис. 4. Схема дискретної моделі, на якій досягнуто збіжність НДС

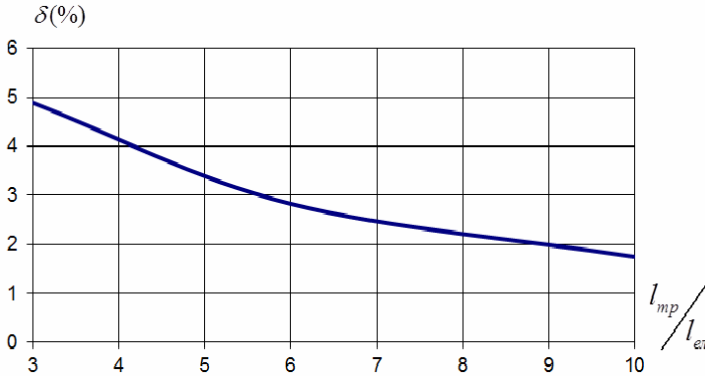


Рис. 5. Вплив розмірів СЕ на точність результатів

Обчислення параметра Гриффітца проводилось як по всій дискретній моделі (8), так і по замкнутому об'єму v різної розмірності, що охоплює вершину тріщини (11). Еталонне значення G визначене через коефіцієнт інтенсивності напружень, значення якого визначають за допомогою відомого виразу:

$$G_{em} = \frac{K_{em}^2}{E} = \frac{(\sigma\sqrt{\pi l})^2}{E} = \frac{\left(1 \frac{\text{кЗ}}{\text{см}^2} \sqrt{3.14 \cdot 0.3 \text{ см}}\right)^2}{1 \frac{\text{кЗ}^2}{\text{см}^2}} = 0.942 \frac{\text{кЗ}}{\text{см}}.$$

Розглядалося три варіанти моделювання появи нової поверхні ΔS за рахунок зміни граничних умов: метод центральних різниць (рис. 6,а), різниць назад (рис. 6,б), різниць вперед (рис. 6,в).

Виявилось, що метод центральних різниць дозволяє з більшою точністю визначати параметр G . Результати обчислення G за формулою (10) та (11) для різних областей співпадають як між собою, так і з результатами отриманими за формулою (8) для всієї дискретної моделі.

Аналогічні результати отримані для тестової задачі про розтяг кінцевої пластини з центральною тріщиною (рис. 7). При дії розтягуючого поверхневого навантаження отримані значення $G_V = G_v = 24.52$.

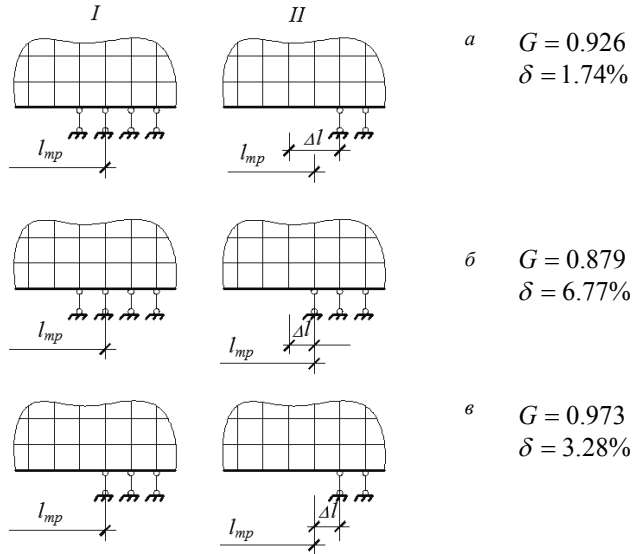


Рис. 6. Варіанти моделювання утворення нової поверхні тріщини

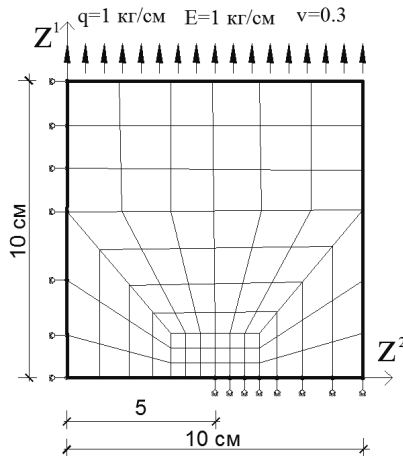


Рис. 7. Скінченна пластина з центральною тріщиною

Якщо крім поверхневого навантаження до пластини додатково прикласти об'ємні сили (наприклад, у вузлах 1, 2, 3, 4 будуть діяти сили

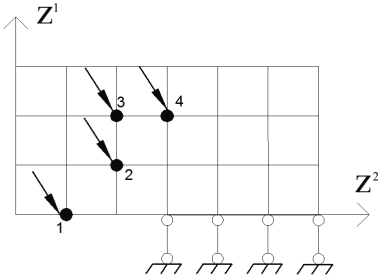


Рис. 8. Точки прикладання об'ємних сил

поверхневих, так і об'ємних силах.

4. Визначення параметра G в просторових тілах з тріщинами на основі НМСЕ. За допомогою виразів (8), (10), (11) визначається середня інтенсивність вивільнення пружної енергії при розвитку тріщини. В багатьох практичних задачах важливо знати також закон розподілу параметра G вздовж фронту тріщини (рис. 9). Аналітичні дослідження виконані в цьому напрямку показали, що біля фронту тріщини в пружному тілі напружено-деформований стан є близьким до плоского (тріщини першого і другого роду) або антиплоского (тріщини третього роду) деформованого стану [5, 6]. Звідси витікає можливість визначати параметр G незалежно в кожній точці фронту тріщини.

При чисельній реалізації такого підходу для визначення G поверхня ΔS ділиться вздовж фронту тріщини на m частин $\Delta S = \sum_{i=1}^m \Delta s^i$, кожна з яких Δs^i складається із примикаючих до тріщини СЕ (рис.9). Аналогічно об'єм V ділиться на локальні об'єми v^i . Тоді формулу визначення значень G_i (11) можна представити для окремих зон фронту тріщини із збереженням властивості інваріантності відносно розглядуваних об'ємів тіла:

$$G_i = \frac{1}{2\Delta s^i} \left(\{R_v^I\}^T \{u_v^II\} - \{R_v^{II}\}^T \{u_v^I\} \right). \quad (12)$$

При цьому значення G_i слід відносити до центрів ваги площин Δs^i .

відповідно 2, 3, 4, 5 кг як вздовж Z^1 так і вздовж Z^2) (рис. 8), то параметр Гріффітца $G_V = G_v = 261.2$.

Таким чином, результати обчислення параметра G за формулами (10), (11) по привершинній області і за формулою (8) для всієї дискретної моделі співпадають. Причому ця властивість зберігається як при

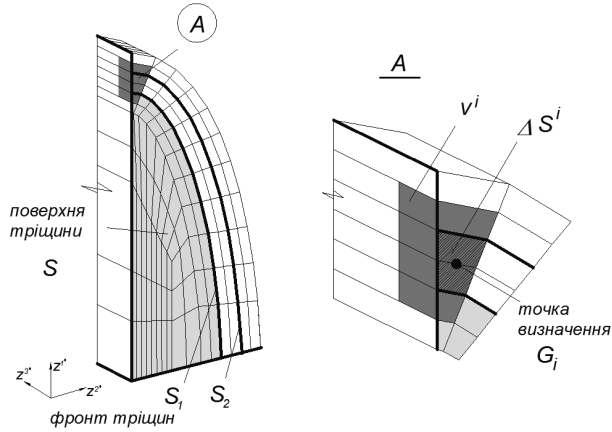


Рис. 9. Схема визначення G на основі НМСЕ в тілах з поперечними тріщинами

При поздовжніх тріщинах в НМСЕ точки визначення G_i співпадають з точками інтегрування СЕ (рис. 10). Поверхня ΔS^j визначається пропорційно відстаням до сусідніх точок інтегрування.

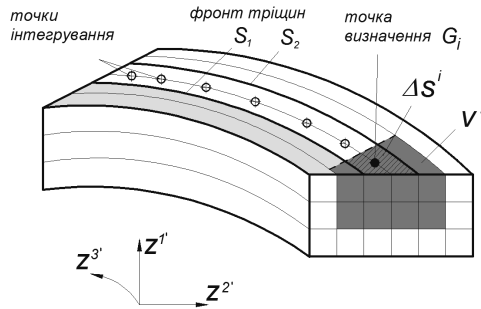


Рис. 10. Схема визначення G на основі НМСЕ в тілах з поздовжніми тріщинами

Апробація розробленої методики в просторових тілах проводилась на тестовій задачі з визначення G в призматичному тілі з боковим надрізом, що завантажене розподіленим вздовж грані навантаженням $q=4300 \text{ кг/см}^2$ (рис. 11). Оскільки розрахункова схема симетрична відносно площини фронту тріщини при СЕ дискретизації моделювання тріщини здійснювалось за допомогою граничних умов і розглядалась лише одна із поверхонь тріщини (рис. 11).

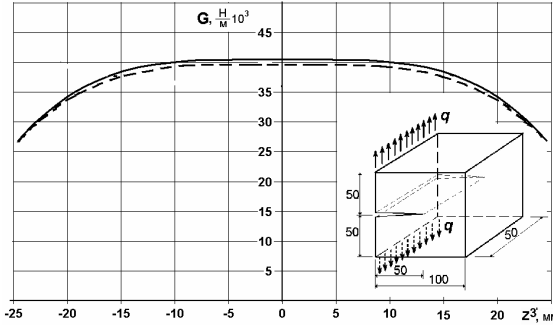


Рис. 11. Призматичне тіло з боковим надрізом

Розподіл G , отриманий за формулою (12) із застосуванням тривимірного МСЕ і НМСЕ, співпадає з результатами отриманими іншими методами в роботі [1].

Висновок. Таким чином, розроблений на основі метода реакцій метод визначення параметра G дозволяє з високою ефективністю оцінювати тріщиностійкість тіл з тріщинами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Максимюк Ю.В., Шкрить А.А. Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного J-интеграла в дискретных моделях МКЭ // Проблемы прочности. – 2011. – № 2. – С. 17–32.
2. Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрить А.А. Метод определения инвариантного J-интеграла в конечно-элементных моделях призматических тел // Прикладная механика. 2008, 44, №12. – С. 70-82.
3. Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Шкрить О.О. Богдан Д.В. Модифікований метод реакцій для визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування просторових призматичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 18-23
4. Броек Д. Основы механики разрушения: Пер. с англ. – М.: Высш. шк., 1980. – 368 с.
5. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 2010. – 256 с.
6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
7. Anderson T.L. Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Maksimuk YU.V., Shkryl' A.A. Resheniye lineynykh i nelineynykh prostranstvennykh zadach mekhaniki razrusheniya na osnove poluanaliticheskogo metoda konechnykh elementov. (linear and nonlinear spatial problems of fracture mechanics on the basis of a semi-analytic finite element method) Soobshcheniye 2. Metodika opredeleniya

- invariantno J-integrala v diskretnykh modelyakh MKE(The method of determining the invariant J-integral in discrete models of FEM) // Problemy prochnosti. – 2011. – № 2.– S. 17–32.
2. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Sakharov A.S., Shkryl' A.A.* Metod opredeleniya invariantnogo J-integrala v konechno-elementnykh modelyakh prizmaticheskikh tel(Method for determining the invariant J-integral in finite-element models of prismatic bodies) // Prikladnaya mekhanika. 2008, 44, №12– s.70-82.
 3. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Shkryl' O.O., Bogdan D.V.* Modifikovaniy metod reaktsiy dlya viznachennya J-integrala v zadachakh pruzhnoplastichnogo deformuvannya prostorovykh prizmaticheskikh til (Modified reaction method for determination of J-integral in problems of elastoplastic deformation of spatial prismatic elements)//Opір матеріалів і теорія споруд: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2011. – Vip. 88. – S.18-23
 4. *Broyek D.* Osnovy mekhaniki razrusheniya(Fundamentals of the mechanics of destruction): Per. s angl. – M.: Vyssh. shk., 1980. – 368 s.
 5. *Morozov Ye.M., Nikishkov G.P.* Metod konechnykh elementov v mekhanike razrusheniya(The finite element method in fracture mechanics). – M.: “Nauka”, 2010. – 256 s.
 6. *Cherepanov G.P.* Mekhanika khrupkogo razrusheniya(Mechanics of brittle fracture). – M.: Nauka, 1974. – 640s.
 7. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

Shkryl' A.

DEFINITION G BASED ON CALCULATION OF INVARIANT VOLUME INTEGRALS BY REACTION METHOD

Among the methods for determining the parameters of fracture mechanics on the basis of FEM the most widely used energy approaches. To date, numerous studies have been carried out to demonstrate the effectiveness of the reaction method in implementing the energy approach. However, in these studies, the question of determining the J-integral is considered. It is generally known that in the presence of bulk forces of different gauge, the J-integral can not be used to assess the crack resistance. Therefore, in this paper, a generalization of the reaction method is carried out to determine the Griffiths criterion, which allows us to assess the crack resistance under the influence of bulk forces of different nature.

In determining the work of external forces and the potential energy of deformation are determined by known formulas in terms of displacement. For this purpose, in discrete models, a spatial body with a crack in two equilibrium states is considered. The first state corresponds to the initial position of the crack, the second to the new position obtained with the growth of the crack for one step of the grid with the emergence of a new surface of the crack. Existing methods for calculating G in discrete models allocate a certain region around the crack front. Therefore, by analogy, the definition formula for a closed volume around a crack of arbitrary configuration was derived. With the invariance of the stiffness matrix of the volume fragment in both states under consideration, the definition formula acquires a simplified form. Approbation of the developed technique was carried out on the test problem of stretching an infinite plate with a central crack. The calculation was carried out both in the entire discrete model and in a closed volume of different dimensions, covering the peak of the crack. The obtained results of calculating the parameter in the complementary region and for the entire discrete model coincide. Moreover, this property is preserved both in surface and volumetric forces. Next, the scheme of application of the developed method for determining the parameter for three-dimensional problems based on the semi-analytic method of finite elements was considered. To test the scheme, a test task was performed on the definition of G in a prismatic body with a lateral incision loaded with load distributed along the face. Distribution G, obtained with the use of three-dimensional FEM and SFEM, coincides with the results obtained by other methods.

Keywords: semi-analytical finite element method, Griffithz parameter, reaction method.

Шкрыль А.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ G НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ РЕАКЦИЙ

На основе вычисления инвариантных объемных интегралов методом реакций, разработан метод определения параметра Гриффитца G в дискретных моделях метода конечных элементов (МКЭ). Решены тестовые задачи. Полученные результаты подтверждают эффективность методики.

Ключевые слова: полуаналитического метод конечных элементов, параметр Гриффитца, метод реакций.

УДК 539.3

Шкрыль О.О. Визначення G на основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 31-42.

На основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій, розроблено метод визначення параметра Гриффітца G в дискретних моделях методу скінченних елементів (МСЕ). Розв'язані тестові задачі. Отримані результати підтверджують ефективність методики.

Табл. 0 Іл. 11 Бібліогр. 7

Shkriil' A. Definition on G based on calculation of invariant volume integrals by reaction method // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – P. 31-42.

On the basis of the calculation of invariant volume integrals by the reaction method, a method for determining the Griffiths parameter G in discrete models of the finite element method is developed. Solved test tasks. The obtained results confirm the effectiveness of the technique.

Table 0. Fig. 11. Ref. 7

Шкрыль А.А. Определение G на основе вычисления инвариантных об'ємных интегралов методом реакций // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вип. 98. – С. 31-42.

На основе вычисления инвариантных объемных интегралов методом реакций, разработан метод определения параметра Гриффитца G в дискретных моделях метода конечных элементов (МКЭ). Решены тестовые задачи. Полученные результаты подтверждают эффективность методики

Табл. 0 Іл. 11 Бібліогр. 7

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доцент, кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки КНУБА Шкрыль Олексій Олександрович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, Шкрилю Олексію Олександровичу.

Адреса домашня: 08132, Україна, м. Вишневе, вул. Г. Сковороди 10, кв. 24

Робочий тел.: +38(044) 245-55-55;

Мобільний тел.: +38(050) 307-61-49.

E-mail: alexniism@ukr.net

УДК 624.011

ОПІР МАТЕРІАЛІВ В РОЗРАХУНКАХ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

В.З. Кліменко¹,

кандидат технічних наук, професор кафедри металевих та дерев'яних конструкцій.

*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський проспект 31, м. Київ 03680*

Діючий метод розрахунку металевих та дерев'яних конструкцій передбачає перевірку міцності поперечних перерізів за умови $\sigma_i \leq R_i$, що не відповідає фізичному змісту розрахунку будівельних конструкцій за першим граничним станом. Запропонована нова редакція першого граничного стану зі збереженням в ньому діалектичної єдності змісту і математичної його формалізації.

Ключові слова: фізична суть розрахунку, математична формалізація розрахунку.

Вступ

В статті з зазначеною назвою і відповідним змістом не було необхідності до 31.12.1954 р., коли будівельні конструкції розраховувалися за допустимими напруженнями у повній відповідності до опору матеріалів. Основні вимоги розрахунку конструкцій полягали у наступному: а) в наскрізних конструкціях - нормальні напруження, рівномірно розподілені по поперечному перерізу стрижня, не повинні перевершувати встановлених нормативним документом допустимих напружень стиску чи розтягу

$$\sigma_{c,p} \leq [\sigma_{c,p}]; \quad (1)$$

б) у суцільних балкових конструкціях – нормальні напруження від згину в розрахункових перерізах не повинні перевершувати відповідного допустимого напруження згину

$$\sigma_{зг} \leq [\sigma_{зг}] \quad (2)$$

і дотичні напруження відповідати умові

$$\tau \leq [\tau]; \quad (3)$$

в) в конструкціях, коли матеріал знаходиться в умові складного опору від згину і поздовжнього зусилля стиску або розтягу, повинні виконуватися умови

$$\frac{N}{F_{нт}} + \frac{M}{W_{нт}} \leq [\sigma_c]$$

або

$$\frac{N}{F_{nm}} + \frac{M}{W_{nm}} \leq [\sigma_p]. \quad (4)$$

Принципова відміна розрахунку будівельних конструкцій за допустимими напруженнями від розрахунку елементів в опорі матеріалів полягала в тому, що в нормах проектування будівельних конструкцій допустимі напруження приймалися як деяка частина від граничних напружень. Граничними напруженнями у пластичних матеріалах була границя текучості, у хрупких матеріалах – границя міцності, у деревині як пружно-в'язко-пластичному матеріалі – тимчасовий опір. Допустиме напруження дорівнювало (у загальному вигляді)

$$[\sigma_i] = \frac{\sigma_{sp_i}}{k_3}, \quad (5)$$

де k_3 - коефіцієнт запасу міцності, індекс « i » означає вид напруженого стану матеріалу.

В розрахунках будівельних конструкцій коефіцієнт запасу інтегрально враховував різноманітні впливи на міцність матеріалів реальних умов експлуатації будівельних об'єктів, окремих їх частин і конструкцій. На коефіцієнті запасу у цій статті не зупиняємося, про нього докладно йдеться у статті [1] і у першій частині статті [2]. Відмітемо те, що у фахівців коефіцієнт запасу отримав неофіційну, але усіма визнану, назву – «коефіцієнт незнання». У цій промовистій назві – суть цього коефіцієнту і фізичного змісту розрахунку за допустимими напруженнями. Метод розрахунку конструкцій з використанням в ньому фактора незнання роботи конструкцій не може мати ідеології і формувати у студентів технічний світогляд, що є однією з вимог до пізнання істини в навчальному процесі.

1. Об'єктивність появи нового методу розрахунку будівельних конструкцій

Провідні вчені вітчизняної будівельної науки одночасно з розробкою і впровадженням перших державних норм по проектуванню будівельних конструкцій з використанням в розрахунках метода допустимих напружень, наприклад [3] і [4], не сприймали присутність у методі коефіцієнта незнання. Ними розроблявся революційний метод розрахунку. Основні положення нового методу, який отримав назву метод граничних станів, викладені у публікації [5]. З впровадженням нового методу з 01.1955 р. для його оволодіння інженерною громадськістю були розроблені посібники [6,7,8,9,10,11]. Наведені посібники з усіх будівельних конструкцій тому, що автор припускає, що зараз інженерам і студентам ці першоджерела метода граничних станів не знайомі.

Прикро припускати, що ці першоджерела, а отже й розрахунок конструкцій за першим граничним станом, не відомі викладачам кафедр будівельних конструкцій. У автора на підставі багаторічного досвіду роботи на кафедрі таке припущення має обґрунтування. Неприпустимо незнання викладачами суті розрахунку будівельних конструкцій за першим граничним станом.

2. Фізична суть першого граничного стану

За результатами дослідження роботи конструкційних матеріалів під навантаженням було встановлено, що межа міцності металів і тимчасовий опір деревини є умовними напруженнями, при досягненні яких рівновага між навантаженням і внутрішніми напруженнями стає неможливою – в результаті зразок втрачає *несучу здатність*. Умовні напруження характеризують не руйнівне напруження, а найбільш можливе на зразок навантаження. При досягненні цього навантаження будівельний елемент перестає задовольняти вимогам, що до нього пред'являються, і такий стан елемента зветься першим граничним.

Розрахункові припущення в розрахунку елементів, з'єднань, конструкцій за першим граничним станом приймаються з урахуванням дійсних умов їхньої роботи у будівлях і спорудах. Перший граничний стан гарантує те, що конструкції, будівлі і споруди не мають зайвих запасів міцності і забезпечує проекту надійності об'єктів у цілому і окремих його частин і конструкцій на увесь період експлуатації об'єктів. Основна вимога першого граничного стану полягає в тому, щоб *розрахункові зусилля в елементах, з'єднаннях, конструкціях не перевершували несучої здатності елементів, з'єднань, конструкцій*. Згідно до цієї вимоги математична формалізація першого граничного стану має вигляд

$$N \leq \Phi. \quad (6)$$

Розрахункове зусилля N знаходиться з розрахункової моделі елемента, з'єднання, конструкції, яка максимально точно відображає роботу елемента, з'єднання, конструкції, але при цьому залишається ще доволі умовною. Зовнішні фактори, що впливають на розрахункову модель, враховуються відповідними коефіцієнтами умов роботи. Ці коефіцієнти різні у конкретних розрахункових моделях, тому вони в умові (6) не показані.

Несуча здатність елемента, з'єднання, конструкції Φ визначається розмірами (в окремих випадках додатково формою поперечного перерізу), розрахунковим опором матеріалу і відповідною системою коефіцієнтів умов роботи матеріалу, яка враховує вплив на його фізико-механічні властивості різноманітних експлуатаційних факторів. В

конкретних розрахунках за умовою (6) номенклатура коефіцієнтів умов роботи матеріалів різна. В першому граничному стані при системі коефіцієнтів умов роботи в несучій здатності елемента стає зайвим науково не обґрунтований загальний коефіцієнт запасу. Чисельні значення коефіцієнтів умов роботи встановлені з тієї умови, що граничний стан не може наступити за увесь термін експлуатації конструкції, будівлі, споруди. Викладені щойно ознаки першого граничного стану формують його ідеологію, яка є складовою технічного світогляду, що згадувався вище.

3. Математична формалізація першого граничного стану

З урахуванням коментарів до N і Φ умова (6) у більш розгорнутому вигляді стає такою

$$v_n k_q N_q \leq k_\Phi \Phi, \quad (7)$$

де v_n - коефіцієнт надійності за відповідальністю об'єкту; k_q - коефіцієнт надійності відповідно до розрахункової моделі, який враховує можливі відхилення від геометричних розмірів, умов закріплення на опорах і розкріплення в прольоті; N_q - розрахункова модель відносно розрахункових навантажень за видами, їх сполучення і можливих, не передбачених нормами, впливів і дій

$$N_q \rightarrow [q v_{fm}(T_q) \psi k_d q'], \quad (8)$$

де q - граничні розрахункові навантаження за видами (власна вага, від снігу і вітру і інше); $v_{fm}(T_q)$ - коефіцієнти надійності за видами навантажень, береться з норм; ψ - коефіцієнт сполучення навантажень, береться з норм; $k_d q'$ - не передбачені нормами навантаження; k_Φ - коефіцієнт надійності відповідно до несучої здатності елемента, з'єднання, конструкції; Φ - теоретична несуча здатність елемента, з'єднання, конструкції

$$\Phi \rightarrow [a R_i k_a], \quad (9)$$

де a - розрахункові геометричні параметри елемента, з'єднання, конструкції; R_i - фактичні розрахункові опори матеріалів відповідно до норм проектування конструкцій; k_a - не передбачені нормами змінення геометричних параметрів « a ».

Математична формалізація розрахунку будівельних конструкцій за умовою (7) діалектично відображає фізичну суть першого граничного стану. Розрахунок за першим граничним станом не передбачає перевірки поперечних перерізів. Що сталося?

Сталося те, що розрахунок будівельних конструкцій за першим граничним станом не використовує опір матеріалу. Це ознака еволюційності методу розрахунку будівельних конструкцій. Новий метод був значним досягненням вітчизняної будівельної науки. Згодом він був визнаний в країнах Західної Європи і набув статусу нормативного в національних стандартах і в загальних європейських стандартах: з проектування металевих конструкцій – Eurocode 3, дерев'яних конструкцій – Eurocode 5. Зараз важко уявити як інженерною громадськістю був прийнятий новий метод, який кардинально відрізнявся від звичного. По характеру розвитку ситуації після впровадження нового методу (про це у [2]) можна припустити, що його неприйняття було дуже активним. Автор висловлює свою особисту думку. Розробникам нового методу слід було наполегливо відстоювати свою прогресивну позицію і залишити діалектичну єдність змісту і форми розрахунку конструкцій за першим граничним станом. Які обставини змусили їх, зберігаючи фізичний зміст першого граничного стану згідно до умови (6), погодитися на розрахункові умови типів (1) і (4). Це об'єктивно не сумісно і ненауково.

Відсутність діалектичної єдності змісту і форми розрахунку конструкцій за першим граничним станом позбавляє його філософії і ідеології, що міститься в умові (7) з урахуванням (8) і (9). Це не сприяє формуванню у студентів технічного світогляду, на що повинен бути направлений процес пізнання істини в навчальному процесі при вивченні дисциплін по будівельним конструкціям. Відсутність діалектичної єдності змісту і форми у подальшій трансформації розрахункового апарату стала причиною іраційності методології викладання в дисциплінах «Металеві конструкції» і «Дерев'яні конструкції» їх розрахунку. Таке не припустимо, як вже наголошувалося у статті, в навчальному процесі. Намагання автора привернути увагу до іраційності методології викладання розрахунку конструкцій і пропозиції щодо запобігання іраційності не мали успіху. Вже давно необхідно було передбачити в навчальних планах будівельного факультету при підготовці інженерів-будівельників, а далі спеціалістів і магістрів перед вивченням студентами дисциплін з циклу «Будівельні конструкції» спецкурсу, в якому розглядається перехід від опору матеріалів до розрахунку конструкцій з використанням математичного апарату з відсутністю в ньому іраційності. Про це у статті нижче після ознайомлення зі станом нормативної бази щодо проектування металевих і дерев'яних конструкцій на додаток до того, що зроблено у другій частині статті [2].

4. Впровадження нового методу розрахунку конструкцій і порушення діалектичної єдності в ньому змісту і форми

Одразу після опублікування посібників [6,7,8] розрахунок конструкцій за першим граничним станом був представлений в нормах і технічних умовах: металевих конструкцій в [12], дерев'яних – в [13]. В обох НІТУ розділи «Основные расчетные положения» починалися з вказівки: расчет конструкций должен производиться по несущей способности, відповідно до [7], [8].

Наведемо розрахунок, для прикладу, тільки центрально розтягнутих елементів:

в [7] і [12]

$$N \leq mRF_{нт}; \quad (10)$$

в [8] і [13]

$$N \leq m_p R_p F_{нт}. \quad (11)$$

Вперше в розрахункових умовах типу [6] з'явилися коефіцієнти умов роботи m і m_p . Умови [10] і [11] за своїм змістом ще далекі до умови [7].

Системи коефіцієнтів умов роботи почали тільки розроблятися, поширюватися, поглиблюватися, усе точніше диференційовано враховувати різноманітні зовнішні фактори, що впливали на розрахункову модель елемента і на його теоретичну несучу здатність.

Вже дуже скоро у наступних будівельних нормах і правилах (СНиП) розрахунок конструкцій за першим граничним станом згадувався дуже скромно або навіть взагалі не згадувався (про це в [2]), а розрахункові формули набули виду:

$$\sigma_i \leq R_i m_j, \quad (12)$$

m_j - коефіцієнти умов роботи, i у вигляді

$$\frac{N}{F_{нт}} + \frac{M}{W_{нт}} \leq R_c m_j \text{ або } R_p m_j. \quad (13)$$

Пояснень фізичної суті формул типу (12) і (13) норми не надають.

У перших після впровадження розрахунку за граничним станом підручниках розрахункові формули відповідали типу (6). В наступних виданнях підручників (тих самих авторів) не тільки сталося заміна розрахункових формул типу (6) на типи (12) і (13), автори виправдовували застосування розрахункових умов, які не відповідають діалектичній єдності змісту і форми. Автори не могли не бачити цієї неприпустимої обставини і мабуть тому у підручниках майже зникли визначення розрахунку конструкцій за першим граничним станом.

П'ятдесят останніх років в підручниках з дисциплін «Металеві конструкції» і «Дерев'яні конструкції» суть першого граничного стану

згадується усе коротше, не достатньо для оволодіння студентами фізичного змісту і ідеології взагалі розрахунку будівельних конструкцій за граничним станом і зокрема першого граничного стану. Розрахункові формули надаються у вигляді (12) і (13).

У свідомості студентів ці формули це трансформація формул опору матеріалів типів (1) - (4) із заміною в них допустимих напружень $[\sigma_i]$ на розрахункові опори матеріалів R_i . Математична формалізація розрахунку металевих і дерев'яних конструкцій за формулами типу (12) і (13) це продовження опору матеріалів у дисциплінах по цих конструкціях.

В нормах проектування МК і ДК розрахунок за першим граничним станом згадується мігцем або взагалі не згадується (!) і він залишається поза увагою користувачів нормами з математичним апаратом за типом (12) і (13).

Те, що сказано вище, доведено у частині другій статті [2] ретроспективним оглядом розрахунку конструкцій за першим граничним станом в підручниках і нормах проектування металевих і дерев'яних конструкцій від моменту впровадження нового методу до часу теперішнього. Зараз ситуація така – є математичний апарат розрахунку металевих і дерев'яних конструкцій, який забезпечує позитивний результат при проектуванні конструкцій. То в чому претензія до методу, яка дозволила охарактеризувати його так гучно – деградація методу. Справа в тому, що математичний апарат з формулами типів (12) і (13) немає ніякого відношення до розрахунку будівельних конструкцій згідно до [6] і посібників [7] і [8]. В цих першоджерелах немає формул за типом (12) і (13) і не могло бути, тому що така математична формалізація не відповідає фізичному змісту розрахунку конструкцій за першим граничним станом, про який йдеться в [5]. Сталося те, що абсолютно неприпустиме в підручниках, нормативних документах і у викладанні дисциплін «Металеві конструкції» і «Дерев'яні конструкції» - відсутність обов'язкової з наукової позиції діалектичної єдності змісту і форми. Так навчати студентів неможна, тому що це неправдиво, ложно. Дивує те, що автори підручників і розробників норм не бентежила іраційність у представленні першого граничного стану у підручниках і нормах. Ненаукове викладання студентам правил розрахунку конструкцій не сумісно з наданням їм наукових знань, істини. Про це докладно і ґрунтовно говорить в навчальному посібнику [14].

Перед тим, як дати пояснення (це суб'єктивна думка автора) іраційності методології розрахунку будівельних конструкцій за першим граничним станом, автор не може не дати характеристику навчального посібника [15].

В назві навчального посібника говориться про розрахунок інженерних конструкцій, в анотації наголошено, що він призначений для будівельних факультетів інженерно-будівельних інститутів. Одним з рецензентів навчального посібника є завідувач кафедри будівельної механіки літальних апаратів інституту цивільної авіації. Навчальний посібник цілком присвячений опору матеріалів і не може бути зауважень до нього, враховуючи фаховий рівень авторів. Відповідно до назви навчального посібника виправданим є рецензент. Згідно з анотацією бажано бачити рецензентом фахівця з проектування будівельних конструкцій. Такий фахівець не погодився би з прикладом, наведеним у §22, стосовно розрахунку на міцність розтягнутого стрижня. В основу розрахунку покладена умова, щоб найбільше напруження не перевершувало так званого допустимого напруження. Така умова задовольняє рецензента, який зазначений у посібнику. Але така умова неприйнятна з позиції розрахунку будівельних конструкцій, вже двадцять два роки минуло після впровадження розрахунку будівельних конструкцій за граничним станом за міцністю і стійкістю [5].

5. Відновлення діалектичної єдності змісту і форми в методі розрахунку конструкцій за першим граничним станом

Зараз мабуть не варто сподіватися на повернення у розрахунок за першим граничним станом до розрахункових формул типу (6). Але неможна миритися з антагонізмом філософських категорій зміст і форма. Це неприпустимо. Позбутися антагонізму, на думку автора, можна зміненням фізичного змісту першого граничного стану із збереженням його ідеології в умові $N \leq \Phi$.

Перехід в нормативних документах на розрахунок будівельних конструкцій за формулами типів (12) і (13) влаштував користувачів нормами. Ці формули за зовнішнім виглядом схожі до звичних формул з попередніх норм. Проблеми філософії обходили користувачів в їхній інженерній практиці. Головне дотримання нормативних вимог.

У перші роки після впровадження розрахунку будівельних конструкцій за граничними станами студенти у циклі дисциплін «Будівельні конструкції» вивчали метод розрахунку з діалектичною єдністю в ньому змісту і форми, яка збереглася у перших нормативних документах, якими користувалися молоді спеціалісти. З часом у цього покоління інженерів могло викликати непорозуміння поява у методі розрахунку нового математичного апарату. Наступні покоління студентів і інженерів вже не відчували різниці у методі розрахунку під час навчання і в інженерній практиці. Прикро, що ненаукова методологія викладання розрахунку будівельних конструкцій укоренилася у вищій школі.

Автор статті в лекціях намагався якимось завуалювати відсутність у методі розрахунку діалектичної єдності змісту і форми. Застосовувався наступний прийом. Пояснювалося, що ліва частина умов (12) і (13) це відображення лівої частини умов типу (7), а права частина умов (12) і (13) це змінена формалізація правої частини умов типу (7). Неможна було студентській аудиторії відверто довести про неприпустиму відсутність діалектичної єдності. Логічних, наукових пояснень іраційності методології немає. Такий прийом сформулював у свідомості лектора засіб, який дозволяє позбутися відсутності єдності філософських категорії у методології викладання розрахунку будівельних конструкцій за першим граничним станом. Не було можливості здійснити задум офіційним шляхом.

Можливість з'явилася з впровадженням ДБН [16]. В цьому документі сучасна трактовка методу розрахунку будівельних конструкцій за граничним станом згідно до 6.2.1 має наступне формулювання: *Граничні стани можуть бути віднесені до конструкцій в цілому, до її окремих елементів, з'єднань або поперечних перерізів.*

На відміну від посібників [6], [7], [8] ДБН [16] передбачає розрахунок за першим граничним станом у вигляді перевірки несучої здатності поперечного перерізу. Автор статті припускає, що така суттєва поправка викликана тим, що в ДБН [16] одночасно з першим граничним станом у нашій його трактовці розглядається граничний стан у трактовці, прийнятій у загальноєвропейських стандартах щодо проектування будівельних конструкцій, яка передбачає перевірку перерізів.

Якщо в умові (6) прийняти розрахункову модель N_q у форматі (8) і теоретичну несучу здатність Φ у форматі (9) віднести до поперечного перерізу, отримаємо умову перевірки несучої здатності за першим граничним станом небезпечного перерізу

$$v_n k_q \left[q v_{fm} (T_q) \psi k_d q' \right] \leq k_\phi a R_i^\phi k_d, \quad (14)$$

в якій фактичні розрахункові опори матеріалів R_i^ϕ знаходяться з їх характеристичних (раніше нормативних) значень $R_{i,k}$ з урахуванням неоднорідності, тривалого опору (для деревини) і усіх встановлених на момент проектування конструкцій, факторів, що впливають на змінення характеристичного значення, і R_i^ϕ дорівнюють

$$R_i^\phi = R_{i,k} m_{i,v}, \quad (15)$$

де $m_{i,v}$ – відображає усі встановлені фактори, комбінаторика яких різна у розрахунках металевих і дерев'яних конструкціям і приймається згідно до норм.

Поділемо ліву і праву частини умови (14) на площу поперечного перерізу «а», з урахуванням того, що $\frac{qv_{fm}\Psi q'}{a} = \sigma_i$ розрахункове напруження у перерізі, і R_i^Φ за (15), отримаємо умову перевірки несучої здатності перерізу

$$v_n k_q k_d \sigma_i \leq R_i m_{i,j} k_\Phi k_a \quad (16)$$

або перевірку напружень у перерізі

$$\sigma_i \leq R_i \frac{m_{i,j} k_\Phi k_a}{v_n k_q k_d}, \quad (17)$$

схожу на умову (12).

Формула (17) забезпечує вірний результат розрахунку, але вона не відповідає вимогам семіотиці – дисципліни у філософії, яка займається вивченням знакових систем. Поняття про семіотику необхідно студентам, тому зупинимося коротко на цій філософській категорії. Семіотика (грец. *Semeion* – знак) вивчає знакові системи формалізованих мов науки. Її важливість у процесі надання наукових знань студентам полягає: по-перше, у передаванні повідомлення або відбиття смислу; по-друге, забезпеченні розуміння студентами фізичної суті наукового повідомлення. Здійснення цих функцій вимагає визначену внутрішню організацію знакової системи, тобто дотримання правил сполучення знаків в ній. Виконання цих правил (вони сформульовані у філософії) створює формалізовану мову науки.

Умова (17) слідує не з опору матеріалів, як це здавалося студентам і користувачам нормами при використанні формул типів (12) і (13) у ненауковій методології викладання розрахунку конструкцій. Умова (17) слідує із загальної умови (7) розрахунку будівельних конструкцій згідно до першого граничного стану зі збереженням в ній його ідеології.

Ознайомлення студентів з семіотикою доводить до їхньої свідомості призначення математичних формул, які є відображенням конкретних фізичних явищ, і важливість структури формул згідно до математичної логіки. З позиції останньої перевірка напружень в поперечному перерізі за формулою (17) не відповідає вимогам семіотики. Знаменник у правій частині формули немає відношення до розрахункового опору матеріалу. Згідно з першим граничним станом, віднесеним до поперечного перерізу, правильною математичною формалізацією перевірки несучої здатності перерізу є умова (16). Перевірка за формулою (17) це арифметика. Автор вважає, що висловлені тут міркування це не «арифметична казуїстика», а науково вірне відображення фізичного явища математичним апаратом з

дотриманням діалектичної єдності змісту і форми у сучасному методі розрахунку будівельних конструкцій.

Висновок

Пропонується наступне визначення розрахунку конструкцій за першим граничним станом. Граничний стан конструкцій за несучою здатністю досягається при максимальному наближенні розрахункових напружень у небезпечному перерізі за умовою (16) до фактичного розрахункового опору матеріала, знайденого за діючими нормами проектування будівельних конструкцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Клименко В.З.* Трансформація метода расчета конструкций по предельным состояниям/Промислове будівництво та інженерні споруди. №3. - 2015. - С.33-38.
2. *Клименко В.З.* Коментарі до деградації методу розрахунку будівельних конструкцій за першим граничним станом/Будівництво України. Ч.1, №1.2017. - С.3-8; ч.2. №2. - 2017.
3. *Металлические конструкции и сооружения. Технические условия и нормы проектирования и возведения/ГНТИ. М.: Л. - 1931.*
4. *Нормы и технические условия проектирования деревянных конструкций/ГИСЛ. М.: Л. - 1939.*
5. *Расчет строительных конструкций по предельным состояниям /Балдин В.А., Гольденбат И.И., Коченов В.М. Под ред. В.М. Келдыша. М.: ГСИ. - 1951.*
6. *Основные положения метода расчета строительных конструкций по расчетным предельным состояниям и нагрузки/Гольденбат И.И., под ред. чл.-корр. Академии наук СССР проф. Н.С. Стрелецкого. - 1955. ГСИ.*
7. *Расчет стальных конструкций по расчетным предельным состояниям/Балдин В.А., под ред. Н.С. Стрелецкого. - 1955.*
8. *Расчет деревянных конструкций по расчетным предельным состояниям/Коченов В.М., под ред. проф. Г.Г. Карлсена. - 1955.*
9. *Расчет бетонных и железобетонных конструкций по расчетным предельным состояниям/Таль К.Э., под ред. проф. А.А. Гвоздева. - 1955.*
10. *Расчет каменных и армокаменных конструкций по расчетным предельным состояниям/Семенцов С.А., под ред. проф. Л.И. Онищика. - 1955.*
11. *Расчет естественных оснований зданий и сооружений по расчетным предельным состояниям/Токарь Р.А., под ред. проф. Н.А. Цытовича. - 1955.*
12. *Нормы и технические условия проектирования стальных конструкций (НиТУ 121-55)/Киев:ГСИ УССР. - 1956.*
13. *Нормы и технические условия проектирования деревянных конструкций (НиТУ 122-55) /Киев:ГСИ УССР. - 1956.*
14. *Станкевич А.М., Клименко В.З.* Розрахунок стиснуто-зігнутих елементів за деформованим станом. Навчальний посібник з науковими і методологічними міркуваннями/Вид-во ТОВ «Сталь». - 2017.
15. *Еременко В.С., Никитин Ю.П., Шкелев Л.Т.* Основы теории расчета инженерных конструкций на прочность и жесткость/Киев: КИСИ. - 1977.
16. *ДБН В.1.2-14-2009.* Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ/Київ.: Мінрегіонбуд України. - 2009.

REFERENCES

1. *Klimenko V.Z.* Transformatsiya metoda rascheta konstruksiy po predelnyim sostoyaniyam (Transformation of the method of calculating structures by limiting states)/Promislove budivnitstvo ta Inzhenerni sporudi. №3. - 2015. - S.33-38.
2. *Klimenko V.Z.* Komentari do degradatsiyi metodu rozrahunku budivelnih konstruksiy za pershim granichnim stanom (Comments to the degradation of the method of calculation of building structures for the first boundary condition)/Budivnitstvo UkraYini. Ch.1, №1.2017. - S.3-8; ch.2. №2. - 2017.
3. Metalicheskie konstruksii i sooruzheniya. Tehnicheskie usloviya i normyi proektirovaniya i vozvedeniya (Metal structures and structures. Technical conditions and design and erection standards)/GNTI. M.: L. - 1931.
4. Normyi i tehnicheskie usloviya proektirovaniya derevyannyih konstruksiy (Norms and technical conditions for the design of wooden structures)/GISL. M.: L. - 1939.
5. Raschet stroitelnyih konstruksiy po predelnyim sostoyaniyam (Calculation of building structures by limiting states)/Baldin V.A., Goldenbat I.I., Kochenov V.M. Pod red. V.M. Keldyisha. M.: GSI. - 1951.
6. Osnovnyie polozeniya metoda rascheta stroitelnyih konstruksiy po raschetnyim predelnyim sostoyaniyam i nagruzki (The main provisions of the method for calculating building structures based on design limit states and loads)/Goldenbat I.I., pod red. chl.-korr. Akademii nauk SSSR prof. N.S. Streletskogo. - 1955. GSI.
7. Raschet stalnyih konstruksiy po raschetnyim predelnyim sostoyaniyam (Calculation of steel structures according to the design limit states) /Baldin V.A., pod red. N.S. Streletskogo. - 1955.
8. Raschet derevyannyih konstruksiy po raschetnyim predelnyim sostoyaniyam (Calculation of wooden structures according to the design limit states)/Kochenov V.M., pod red. prof. G.G. Karlse. - 1955.
9. Raschet betonnyih i zhelezobetonnyih konstruksiy po raschetnyim predelnyim sostoyaniyam (Calculation of concrete and reinforced concrete structures according to the design limit states)/Tal K.E., pod red. prof. A.A. Gvozdeva. - 1955.
10. Raschet kamennyih i armokamennyih konstruksiy po raschetnyim predelnyim sostoyaniyam (Calculation of stone and armo-stone constructions according to the design limit states)/Sementsov S.A., pod red. prof. L.I. Onischika. - 1955.
11. Raschet estestvennyih osnovaniy zdaniy i sooruzheniy po raschetnyim predelnyim sostoyaniyam (Calculation of the natural bases of buildings and structures according to the design limit states)/Tokar R.A., pod red. prof. N.A. Tsyitovicha. - 1955.
12. Normyi i tehnicheskie usloviya proektirovaniya stalnyih konstruksiy (Norms and technical conditions for the design of steel structures) (NiTU 121-55)/Kiev:GSI USSR. - 1956.
13. Normyi i tehnicheskie usloviya proektirovaniya derevyannyih konstruksiy (Norms and technical conditions for the design of wooden structures)(NiTU 122-55) /Kiev:GSI USSR. - 1956.
14. *Stankevich A.M., Klimenko V.Z.* Rozrahunok stisnuto-zlgnutih elementiv za deformovanim stanom. Navchalniy posibnik z naukovimi i metodologichnimi mlrkuvannyami (Calculation of compressed-bent on a strain of element. Textbook of scientific and methodological considerations)/Vid-vo TOV «Stal». - 2017.
15. *Eremenko V.S., Nikitin Yu.P., Shkelev L.T.* Osnovi teorii rascheta inzhenernyih konstruksiy na prochnost i zhestkost (Fundamentals of the theory of calculating engineering structures for strength and rigidity)/Kiev: KISI. - 1977.
16. DBN V.1.2-14-2009. Zagalni printsipi zabezpechennya nadlynostl ta konstruktivnoyi bezpeki budlvel, sporud, budlvelnih konstruksiy ta osnov (General principles of reliability and structural safety of buildings, structures and foundations)/KiYiv.: MiNRegionbud UkraYini. - 2009.

Klimenko V.Z.

STRENGTH OF MATERIALS IN THE CALCULATION OF BUILDING STRUCTURES

Current method for calculating the of metal and wooden structures involves checking the strength of cross-sections provided $\sigma_i \leq R_i$, that does not meet the physical content of calculation of building structures for the first boundary condition. A new edition of the first limiting condition preserving it dialectical unity of content and its mathematical formalization.

Keywords: physical nature of the calculation, calculate mathematical formalization.

Клименко В.З.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В РАСЧЕТАХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Действующий метод расчета металлических и деревянных конструкций предусматривает проверку прочности поперечных сечений по условию $\sigma_i \leq R_i$, что не соответствует физическому явлению расчета строительных конструкций по первому предельному состоянию. Предложена новая редакция первого предельного состояния при сохранении в ней диалектического единства содержания и математической его формализации.

Ключевые слова: физическая суть расчета, математическая формализация расчета.

УДК 624.011

Клименко В.З. **Опір матеріалів в розрахунках будівельних конструкцій** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 43-55.

Запропонована нова редакція першого граничного стану зі збереженням в ньому діалектичної єдності змісту і математичної його формалізації.

Бібліогр. 16 назв.

Клименко В.З. **Сопротивление материалов в расчетах строительных конструкций** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2017. – Вып. 98. – С. 43-55. – Укр.

Предложена новая редакция первого предельного состояния при сохранении в ней диалектического единства содержания и математической его формализации.

Библиогр. 16 назв.

Klimenko V.Z. **Strength of materials in the calculation of building structures** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2017. – Issue 98. – P. 43-55. – Ukr.

A new edition of the first limiting condition preserving it dialectical unity of content and its mathematical formalization.

Bibliograf. 16 ref.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, професор, професор кафедри металевих та дерев'яних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури КЛІМЕНКО Віталій Захарович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури КЛІМЕНКУ Віталію Захаровичу

Робочий тел.: +38(044) 244-9665

E-mail: vcbk@ukr.net

УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУВАТОГО ПОКРИТТЯ АВТОМОБІЛЬНОЇ ДОРОГИ

В.В. Гайдайчук¹,
д-р техн. наук

В.В. Мозговий²,
д-р техн. наук

Ю.О. Засць¹,
канд. техн. наук

Л.В. Шевчук¹,
канд. техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

²*Національний транспортний університет,
вул. Суворова 1, м. Київ. 01010*

Поставлена задача про комп'ютерне моделювання еволюції полів температури та напружень в масиві дорожнього покриття. Побудовані скінченно-елементні моделі явищ поширення тепла і формування викликаних ним полів напружень. Показано, що сформульоване рівняння теплопровідності є сингулярно збуреним. В зв'язку з цим поля температури, спричинені еволюцією зовнішнього теплового збурення, мають вид крайових ефектів, локалізованих у вузькій зоні вільної поверхні покриття.

Ключові слова: автомобільна дорога, асфальтобетонне покриття поле температур, термопружне деформування, шарувато-неоднорідний напівпростір.

1. Вступ. Вигідне географічне розташування України на шляху основних транзитних потоків між Європою та Азією, а також розгалужена мережа автомобільних доріг створюють усі необхідні передумови для збільшення обсягів транзиту країною вантажів. Проте сучасна транспортна галузь держави досі конче потребує комплексного розвитку, а якість дорожніх сполучень як була, так і лишається для України надзвичайно гострою проблемою. Одним із факторів, що суттєво впливають на якість автомобільних доріг з асфальтобетонним покриттям, є кліматичні умови. Як правило, незадовільний стан таких доріг безпосередньо пов'язаний з частими перепадами навколишньої температури.

Основна особливість задач аналізу термопружного напружено-деформованого стану дорожнього обшиву є їх багатопараметричність. Перш за все конструкції дорожніх покриттів являються істотно неоднорідними. В механіці суцільних середовищ розрізняють шарувато-неоднорідні

середовища, в яких середовище складається з декількох пружних шарів з відмінними термомеханічними характеристиками, і градієнтно-неоднорідні середовища [3, 5], властивості яких змінюються за просторовими змінними неперервним способом. Оскільки в дорожньому будівництві, в основному, застосовуються шарувато-неоднорідні дорожні покриття [6, 11], то при математичному моделюванні механічних процесів, що протікають при їх експлуатації, доводиться мати справу з властивою їм специфікою розподілу полів деформацій і напружень. Справа в тому, що функції деформацій і напружень (а іноді і переміщень), які виникають в них, як правило, виявляються розривними і їх важко описувати простими аналітичними і чисельними засобами. З цією особливістю пов'язане і істотне ускладнення механічних явищ, що спостерігаються в них. Оскільки при експлуатації покриття дороги піддаються не тільки дії інтенсивних швидко змінних (розривних) за просторовими і часовими змінними навантажень, але також і постійно тепловим збуренням, що еволюціонує, з істотними градієнтами, проектування їхніх конструкцій має проводитися на основі вибору оптимальних (раціональних) характеристик матеріалів, що використовуються, їх термомеханічних властивостей, геометричних параметрів проєктованих шарів і порядку їхнього чергування. Цей вибір може бути зроблений за допомогою комп'ютерного моделювання термо-напруженого стану дорожнього покриття та його еволюції за часом.

2. Методика скінченно-елементного моделювання дорожнього покриття. Виділений для розрахунку термомпружного напружено-деформованого стану поперечний переріз конструкції дороги включає чотири шари дорожнього покриття і масив прилеглої ґрунту, його конструктивна схема зображена на рис. 1. Геометрична схема конструкції

ділянки автомобільної дороги і її фрагментів з параметрами $L_1 = 24,5 м$,

$$L_2 = 23,5 м, \quad L_3 = 11,5 м,$$

$$L_4 = 7,5 м, \quad H = 0,55 м,$$

$$H_1 = 0,5 м, \quad H_2 = 2 м$$

представлена на рис. 2.

Види матеріалів

фрагментів конструкції, їхні товщини h_1, h_2, h_3, h_4 , і значення термомеханічних параметрів наведені у табл. 1. В ній позначено: E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; ρ – густина; α_T – коефіцієнт теплового лінійного розширення; λ – коефіцієнт теплопровідності; $c_{об}$ – питома об'ємна теплоємність.

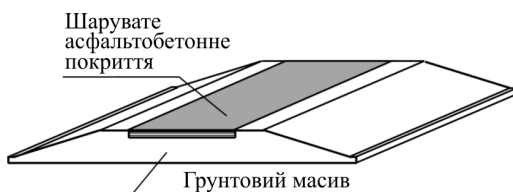


Рис. 1

Таблиця 1

Номер i -го шару	Матеріал	$h_i, м$	$E_i, Па$	$\rho, кг/м^3$	ν	α_T, C^{-1}	$\lambda, Вт/(м \cdot К)$	$C_{об}, Дж/(м^3 \cdot К)$
1	Асфальтобетон дрібнозернистий	0,05	$5 \cdot 10^9$	2400	0,2	$2,46 \cdot 10^{-5}$	1,0	$3,77 \cdot 10^6$
2	Асфальтобетон пористий круглозернистий	0,1	$1,4 \cdot 10^9$	2390	0,25	$1,92 \cdot 10^{-5}$	0,7	$2,63 \cdot 10^6$
3	Щебінь	0,2	$0,4 \cdot 10^9$	2300	0,3	$1,8 \cdot 10^{-5}$	0,5	$1,81 \cdot 10^6$
4	Пісок	0,2	$0,1 \cdot 10^9$	2050	0,3	$1,1 \cdot 10^{-5}$	1,5	$4,83 \cdot 10^6$
5	Ґрунт	2,5	$0,1 \cdot 10^9$	1960	0,35	$0,31 \cdot 10^{-5}$	1,05	$3,23 \cdot 10^6$

Вважалося, що конструкція доріг піддається термічній дії в результаті денної зміни температури повітря. Було прийнято, що при цьому температура на її верхній поверхні змінюється за заданим законом. Розрахунки еволюції поля температури в масиві конструкції проведені методом скінченних елементів. При цьому було враховано, що уздовж поздовжньої осі Oy дороги деформації $\epsilon_y = 0$ і весь масив знаходиться в стані плоского деформованого стану. Ця обставина дозволила виділити перетинами $y = 0$ і $y = \Delta y$ поперечний шар масиву товщиною Δy і апроксимувати систему тривимірними скінченними елементами з розміром Δy вздовж координати y .

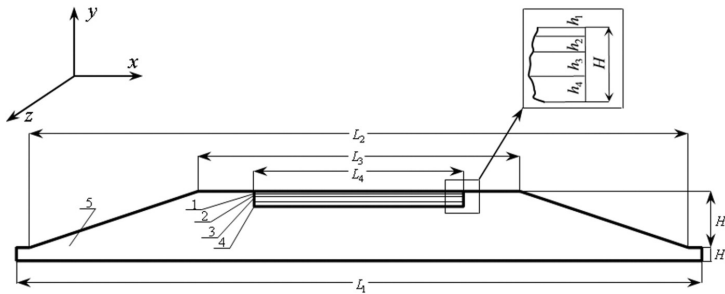


Рис. 2. Схема поперечного перерізу конструкції дорожнього покриття

Скінченноелементна модель системи з виділенням її пошаровим фрагментом 1-4 і ґрунтовим масивом 5 показана на рис. 3. Збоку кожного фрагмента вказано число скінченних елементів дискретної моделі. При цьому загальне число скінченних елементів склало 29868.

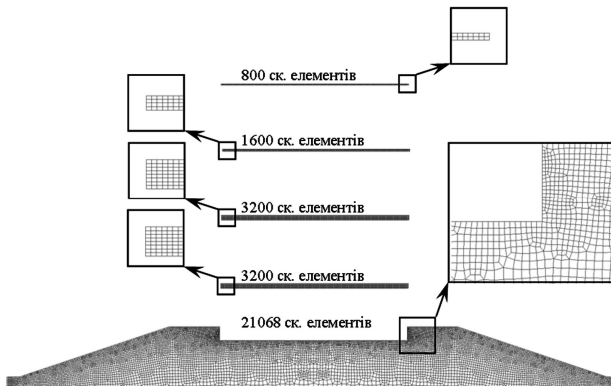
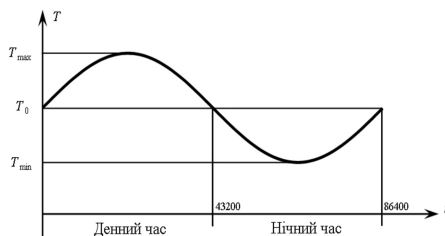


Рис. 3. Скінченно-елементна модель перерізу дороги

3. Основні співвідношення термопружного напруженого стану покриття дороги. Досліджуються процеси еволюції поля температури в масиві покриття дороги при добовій зміні температури навколишнього середовища. З урахуванням натурних спостережень прийнято, що в результаті атмосферних температурних варіацій температура T на поверхні покриття та придорожного ґрунту в денний час змінюється за законом синусоїди від деякого початкового значення T_0 (вранці) до її максимуму T_{\max} (опівдні) і до вечора знову падає до вихідного значення T_0 . В нічний час, навпаки, температура зменшується від T_0 (ввечері) до T_{\min} (опівночі) і потім знову зростає до T_0 (в ранковий час). Схема зміни $T(t)$ протягом 24 годин ($0 \leq t \leq 86400$ с) показана на рис. 4.

Задача про термопружне деформування дорожнього покриття розв'язується в лінійній постановці. Це дозволяє аналізувати тільки прирости деформацій і напружень, викликані приростами температури. Тому будемо вважати, що в початковому стані температура всього масиву (як і T_0), деформації та напруження дорівнюють нулю і будемо аналізувати процес термопружного деформування при зміні температури $T(t)$ на поверхні за законом (рис. 4)

Рис. 4. Графік зміни за часом t температури на поверхні покриття

$$T(t) = (T_{\max} - T_0) \sin(\pi t / 43200). \quad (1)$$

Тоді еволюція поля температури на границях кожного шару покриття і масиву ґрунту визначається рівнянням нестационарної теплопровідності [4]

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Тут $a = \lambda_q / c_{об}$ - коефіцієнт температуропровідності, λ_q - коефіцієнт теплопровідності, $c_{об}$ - питома об'ємна теплоємність, доданок $\nabla^2 T$ - еквівалентний виразу $\partial T / \partial x^2 + \partial T / \partial y^2 + \partial T / \partial z^2$.

Вважаємо, що при термопружному деформуванні всього масиву силами інерції можна знехтувати і процес буде квазістатичним. Тоді поле пружних переміщень $\mathbf{u}(x, y, z)$ описується векторним рівнянням [4, 7, 8]

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (x + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(T) = 0, \quad (3)$$

де λ і μ - ізотермічні параметри Ляме.

Граничні умови для функції $T(x, y, z, t)$ на вільній поверхні задаються у формі (1), на умовних кінцях виділеної області прийнято, що теплові потоки в напрямку нормалі відсутні, тому похідна від T за нормаллю \mathbf{n} дорівнює нулю,

$$\partial T / \partial n = 0. \quad (4)$$

При формулюванні граничних умов для функції $\mathbf{u}(x, y, z)$ вважалось, що на верхній поверхні середовище вільне від нормальних і дотичних напружень, а на бічних і нижній поверхнях умовних розрізів переміщення по нормалі і дотичній напруження дорівнюють нулю. На поверхнях контакту шарів покриття між собою і з ґрунтовим масивом були прийняті умови сполучення функцій T і відповідних функцій переміщень і деформацій.

Прийнята постановка задачі про термопружне деформування виділеного багат шарового масиву дозволила використовувати алгоритм її вирішення, при якому спочатку розв'язується задача нестационарної теплопровідності для рівняння (2) на всьому діапазоні часу t , рівному 24 годин (86400 с). Потім в потрібні для нас моменти часу t_i з використанням побудованих полів температури $T(x, y, z, t_i)$, за допомогою рівнянь (3) визначалися поля переміщень, деформацій і напружень.

Розв'язання цих рівнянь здійснюється шляхом переходу до скінченно-елементних моделей [1, 2]

$$\begin{aligned} [K_T] \{T\} - [A] \{\dot{T}\} &= \{T_f(t)\}, \\ [K_u] \{u\} &= [L] \{T(t_i)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $[K_T]$ - матриця коефіцієнтів скінченно-елементної моделі рівняння теплопровідності, $[A]$ - матриця коефіцієнтів моделі при похідній \dot{T} , $\{T_f(t)\}$ - вектор заданих значень температури T на поверхні покриття, $[K_u]$ - матриця жорсткості для скінченно-елементної моделі пружного масиву, $[L]$ - матриця, яка відображає вплив температури на переміщення елементів масиву.

Після підрахунку значень компонент вектора переміщень $\{u\}$ у вузлах скінченно-елементної моделі обчислювалися компоненти тензорів деформацій ε_{jk} і напружень σ_{jk} . Вони визначалися за допомогою рівностей [8]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{jk} &= \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}), \\ \sigma_{jk} &= 2\mu\varepsilon_{jk} + [\lambda\varepsilon_{ll} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \cdot T]\delta_{jk},\end{aligned}\quad (6)$$

дискретизованих в кожному вузлі моделі.

У цих рівностях індекси j, k, l пробігають значення 1, 2, 3; при цьому напрямки x_1, x_2, x_3 відповідають напрямкам x, y, z ; $u_{j,k} = \partial u_j / \partial x_k$; $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$; δ_{jk} - символ Кронекера, що дорівнює 0 при $j \neq k$ і рівний 1 при $j = k$.

4. Аналіз крайових ефектів розподілу температури методами теорії сингулярно збурених систем. Попередній розгляд геометричної схеми дорожнього покриття (рис. 2), термо-механічних параметрів властивостей його фрагментів (табл. 1) і форми функції теплового збурення (рис. 4) змушують зробити припущення, що поставлена задача про термонапружений стан проста і термопружні ефекти, які супроводжують еволюцію поля температур в даному шаруватому масиві, є елементарними. Однак такий спрощений висновок є поверхневим і абсолютно не відповідає дійсності. Є два фактори, які роблять явище, що розглядається, нетривіальним і вельми привабливим, а проблему його моделювання досить трудомісткою. По-перше, середовище, в якому еволюціонує температурне поле, шарувато-неоднорідне і, по-друге, проблема його моделювання при обраних значеннях термомеханічних характеристик і розмірів виділеної для розгляду області відноситься до класу сингулярно збуреною, якщо коефіцієнт $1/a$ перед похідною $\partial T / \partial t$ в рівнянні (2) малий, а розмір області в напрямку поширення теплового потоку досить великий. Тоді при зовнішньому тепловому збуренні тепловий потік не встигає проникнути від граничної

поверхні вглиб тіла і поле температури отримує помітну зміну лише в приграничній зоні, набуваючи форму так званого крайового ефекту. У цьому випадку функція температури $T(x, y, z, t)$ не тільки досягає помітні прирости в крайовій області, а й характеризується також високими значеннями її градієнтів, тобто похідних за просторовими змінними. Такий ефект супроводжується утворенням великих перепадів значень функції переміщень і деформацій пружного тіла, а також нормальних і дотичних напружень. Відомо, що тільки у випадку, коли в однорідному пружному тілі, вільному від в'язей, поле температури $T(x, y, z)$ постійне або навіть змінюється лінійно за просторовими змінними x, y, z , то всі напруження в ньому дорівнюють нулю. У всіх інших випадках у ньому формуються ненульові напруження і вони зростають з ускладненням температурних полів. Другий фактор пов'язаний з тим, що інтенсивності термопружних напружень ще більше збільшуються, якщо неоднорідними є також характеристики пружності середовища, тим більше, якщо вони шарувато неоднорідні. Тоді поле напружень стає розривним і набуває яскраво виражені екстремуми. Очевидно, що всі ці явища є деструктивними для тіл і середовищ, що розглядаються, а задачі теоретичного (комп'ютерного) моделювання цих явищ відрізняються великою складністю і поганою обчислювальною збіжністю. У зв'язку з цим чисельне дослідження термопружного напруженого стану таких систем доводиться проводити на малих скінченно-елементних решітках і додатково тестувати результати обчислень.

5. Результати скінченно-елементного моделювання. За розробленою методикою було проведено комп'ютерне моделювання конструкції дорожнього покриття, представленого на рис. 2, при значеннях параметрів, наведених у таблиці 1, на основі скінченно-елементної моделі, показаної на рис. 3. Було прийнято, що протягом дня температура на верхній поверхні покриття змінювалася за законом (1) при $T_0 = 0$, $T_{\max} = 12^\circ \text{C}$ (див. графік на рис. 4). На рис. 5 показано поле розподілу температури в поперечному перерізі конструкції дороги в момент часу $t = 6$ годин, коли температура на поверхні покриття досягає максимуму.

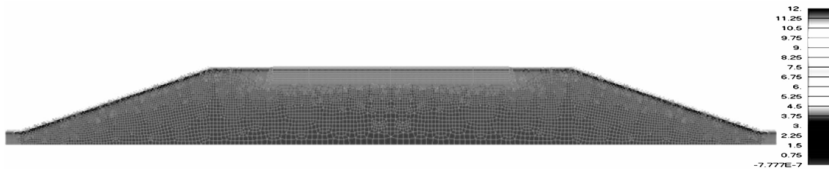


Рис. 5. Поле розподілу температури

Значення температури в кожній точці перерізу можуть бути визначені за шкалою кольорової палітри, яка наведена праворуч. Для наочності температурне поле представлено на окремих фрагментах системи (рис. 6). Можна помітити, що максимальні значення температури локалізуються в крайовій зоні, прилеглої до верхньої поверхні покриття.

Для більшої наочності представимо в детальній формі графік зміни температури вздовж центральної вертикалі покриття. На рис. 7,а подана схема шарів покриття, що знаходиться у відповідності з координатною віссю Oy , яка напрямлена вертикально. На цій осі побудовані функції $T(y)$ для моментів часу $t=6 \text{ год}$ (рис. 7,б), $t=12 \text{ год}$ (рис. 7,в), $t=18 \text{ год}$ (рис. 7,г).

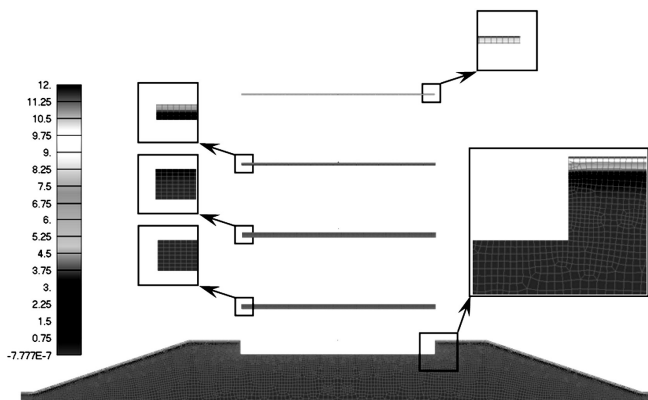


Рис. 6. Поля температури у фрагментах конструкцій дороги

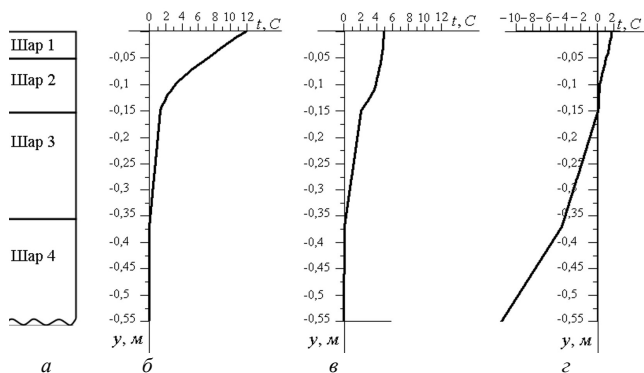


Рис. 7. Схема розподілу температури по глибині у виділеному центральному скінченно-елементному стовпчику

Можна побачити (рис. 7,б), що поле температури має помітні значення лише на границях першого і половини другу шарів. При цьому наступні (більш низькі) шари і ґрунт виявилися непрогрітими. На рис. 7,б видно також істотний градієнт функції $T(y)$ в приграничній зоні, яка знаходиться у відповідності з теорією сингулярно збурених рівнянь параболічного типу [12, 9].

Генерування температурного поля у вигляді крайового ефекту і шарувата неоднорідність дорожнього покриття обумовлюють формування в ньому полів напружень досить складної структури. Для їх побудови спочатку з використанням знайденої функції температури розв'язується система рівнянь (3) на тій же самій скінченно-елементній решітці і потім за допомогою формул (4) обчислюються деформації і напруження в усіх її вузлах.

На рис. 8 представлена схема поперечного перерізу покриття в деформованому стані. Відповідний йому напружений стан конструкції має особливу специфіку. Вона обумовлена не тільки неоднорідністю температурного поля і характеристик пружності системи, але і її конструкцією. Так, для прийнятої розрахункової схеми конструкції дороги пружні переміщення уздовж її поздовжньої осі дорівнюють нулю. Тому можна записати

$$u_z = u_3 = 0, \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_{33} = 0. \quad (7)$$

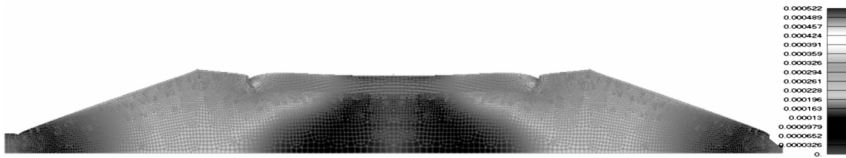


Рис. 8. Схема перерізу дороги в термдеформованому стані

Оскільки вся виділена для розрахунку конструкція дороги являє собою шарувату структуру і на її верхній поверхні нормальні напруження дорівнюють нулю, то можна вважати, що і в усьому її масиві

$$\sigma_{yy} = \sigma_{22} \approx 0. \quad (8)$$

тоді маємо

$$\sigma_{yy} = 2\mu\epsilon_{yy} + [\lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})] - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T = 0. \quad (9)$$

Звідси можна ϵ_{yy} виразити через ϵ_{xx}

$$\epsilon_{yy} = [-\lambda\epsilon_{xx} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T]/(\lambda + 2\mu) \quad (10)$$

і напруження σ_{xx} і σ_{zz} представити в формі

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T = \\
 &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{xx} - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\alpha_T T, \\
 \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T = \\
 &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{xx} - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\alpha_T T.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Оскільки в отриманих виразах функції σ_{xx} і σ_{yy} виражені тільки через деформацію ε_{xx} і температуру T , причому складові, що містять T , однакові, можна напруження σ_{zz} виразити через σ_{xx} і T

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xx} - 2\mu\varepsilon_{xx}. \tag{12}$$

Ця рівність дозволяє встановити важливі закономірності розподілу полів напружень в шаруватих дорожніх покриттях. По-перше, як вже зазначено вище, можна вважати, що нормальні напруження σ_{yy} на площадках $y = const$ малі і тоді приймемо, що

$$\sigma_{yy} = 0. \tag{13}$$

По-друге, враховуючи, що модуль пружності ґрунту E_5 помітно менший модулів пружності $E_i (i = 1 \div 4)$ кожного з шарів покриття, то ґрунтове середовище на бічних границях покриття слабо перешкоджає вільному тепловому розширенню в бічному напрямку і шари майже вільно розширюються. Тому приймемо, що при додатній T деформація ε_{xx} також додатна і в рівності (11) для ε_{xx} ця величина набуває порівняно невеликі за модулем від'ємні (стискаючі) значення за рахунок другого доданка.

У цьому випадку за допомогою рівності (12) можна встановити третю характерну особливість розподілу полів термопружних напружень в даній структурі. Так як в правій частині цієї рівності величина σ_{xx} порівняно мала і від'ємна і від неї віднімається немала величина (другий член з додатним ε_{xx}), то σ_{zz} приймає від'ємне і найбільше за модулем значення.

Результати проведеного скінченно-елементного моделювання підтвердили ці висновки. Оскільки під дією теплового збурення встигають прогріватися тільки шари конструкції, прилеглі до її вільної поверхні, то термопружні переміщення також мають помітні переміщення лише в приграничній зоні (рис. 8), хоча їх значення залишаються досить малими і лише трохи перевищують 0,5 мм.

Сформульовані вище докази про особливості формування полів напружень σ_{xx} і σ_{zz} також відповідають даним чисельного аналізу (рис. 9 і 10, відповідно). На рис. 9,б-9,г представлені графіки функцій термопружного напруження σ_{xx} у виділеному центральному скінченно-елементному стовпці у різні моменти часу (рис. 9,б – 6 год, рис. 9,в – 12 год, рис. 9,г – 18 год). Перш за все зазначимо, що стискаючі напруження σ_{xx} досягають пікових значень в границях першого шару, де найбільшими є і модуль пружності E (див. табл. 1), і значення температури T . У границях другого шару напруження σ_{xx} набули істотно менших значень, причому вони виявилися знакозмінними. Цей ефект обумовлений тим, що перший шар, завдяки підвищеній температурі, отримав більш істотні переміщення u_x і захопив за собою другий шар, який при цьому виявився частково розтягнутим. Інші шари покриття виявилися практично ненапруженими.

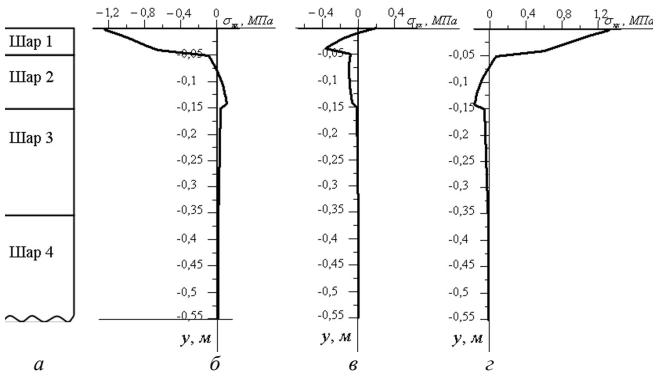


Рис. 9. Схема розподілу термопружних напружень σ_{xx} у виділеному центральному скінченно-елементному стовпці

Маючи в своєму розпорядженні графік функції σ_{xx} на рис. 9, можна за допомогою формули (12) легко оцінити вид напружень σ_{zz} (рис. 10). Вони помітно перевищують напруження σ_{xx} і їх концентрація в границях першого шару є очевидною.

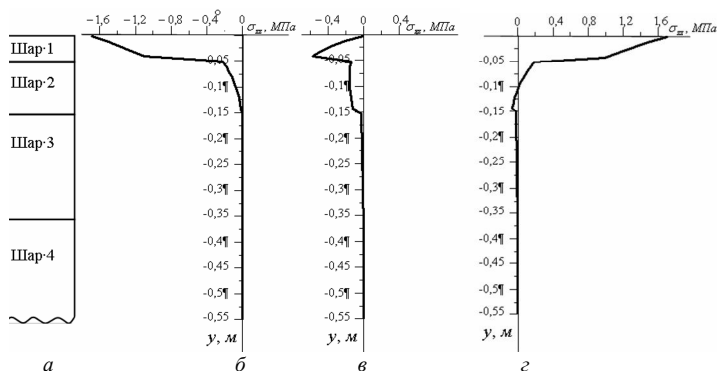


Рис. 10. Схема розподілу термопружних напружень σ_{zz} у виділеному центральному скінченно-елементному стовпці

Дотичні напруження σ_{xy} в даній системі формуються завдяки згенерованому градієнту температурного поля в крайовій зоні. У центральному стовпці конструкції вони дорівнюють нулю в силу симетрії системи відносно цього перерізу і досягають найбільших значень приблизно у вертикальному перерізі, який віддалений на чверть ширини покриття від центру (див. рис. 11). Причому максимальне значення цієї функції досягається на границі першого і другого шарів, де максимальним є градієнт $T(x, y)$.

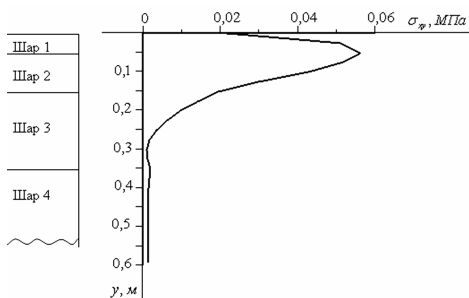


Рис. 11. Схема розподілу термопружних напружень σ_{xy} у виділеному центральному скінченно-елементному стовпці при $t = 6$ год

Відзначимо також, що напруження σ_{xx} і σ_{yy} зростають зі збільшенням ширини дороги L_4 і зменшуються з її зменшенням. Тому якщо ширина дороги велика і є доцільність зменшення термопружних напружень, то вони можуть бути знижені за рахунок роздільного шва, який зроблений уздовж роздільної лінії дороги.

Зазначені властивості розподілу полів температури і напружень в масиві дорожнього покриття встановлені для випадку додатних збільшень значень температури на вільній поверхні системи. При цьому напруження

σ_{xx} і σ_{zz} виявилися, в основному, стискаючими, що можна розцінювати як сприятливий фактор, оскільки матеріали покриття, здебільшого, мають порівняно високі характеристики при їх стисканні, і вони гірше чинять опір зусиллям зсуву і, особливо, розтягу. У зв'язку з тим, що розглянута задача вивчається в лінійній постановці, то можна очікувати, що при від'ємних значеннях температури, що збудується, всі шукані функції збережуть свої форми і тільки змінять знак. Тому можна зробити висновок, що зимовий час є найбільш сприятливим для міцності дорожнього покриття, оскільки напруження σ_{zz} в верхньому шарі є розтягнутими і мають найбільші значення.

На завершення відзначимо основні закономірності формування полів термопружних напружень. До найпомітнішого явища можна віднести утворення крайового ефекту у функції розподілу температури $T(x, y, z, t)$. У зв'язку з цим суміщення гладкої неоднорідності температурного поля і шаруватой неоднорідності термомеханічних властивостей фрагментів покриття приводить до концентрацій напружень, які є розривними функціями і змінюють свої знаки при еволюції температурного поля. Вони також значною мірою залежать від наявності обмежень, що перешкоджають вільному термопружному розширенню-звуженню окремих фрагментів системи. Тому можна стверджувати, що вибором коефіцієнтів теплопровідності і температурного лінійного розширення, а також параметрів пружності можна керувати характером розподілу полів температури і напружень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайдайчук В.В.* Механіка конструкцій вітроенергетичних установок: монографія / В.В. Гайдайчук, В.П. Носенко, С.М. Худолій; за ред. д-р техн. наук, проф. В.І. Гуляєва. – К.: Видавництво Аграр Медіа Груп, 2013. –263 с.
2. *Гуляєв В.І.* Скінченноелементний аналіз стійкості коливань лопатей ВЕУ при складному обертанні / В.І. Гуляєв, В.В. Гайдайчук, В.П. Носенко // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2013. – №1. – С. 8 – 13.
3. *Засць Ю.О.* Екранування розривних хвиль шаром пружного середовища / Ю.О. Засць // Вісник НТУ. - 2010. - Вип.21. - С.366 – 371.
4. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова Думка, 1970. – 239 с.
5. Механика горных выработок при действии гравитационных и динамических нагрузок: монография / [В. И. Гуляев, П. З. Кошель, Ю. А. Заец и др.]. – Ивано-Франковск : Изд-во Прикарпат. нац. ун-та им. В. Стефаника, 2014. – 438 с.
6. *Мозговой В.В.* Повышение гидроизоляционной способности асфальтобетонного покрытия / В.В. Мозговой // Проблемы механики и строительства транспортных сооружений: Труды II Международной научно-практической конференции. - Алматы. – 2015. – 54-60 с.
7. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975 – 872 с.

9. *Шишкин Г.И.* Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем / Г.И. Шишкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1989. - Т.29, № 7. - С.963 – 977.
10. *Chang K.W.* Nonlinear Singular Perturbation Phenomena / K.W.Chang, F.A.Howes. – Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.
11. *Radovsky B.* Ways to reduce low-temperature cracking of asphalt pavements / B. Radovsky, V. Mozgovoj // 4-th Eurobitum Symposium. Summaries and papers. Madrid, 4-9 oct. – 1989. Vol. 1. – P. 571-575.
12. *Shishkin G.I.* Method of splitting for singularly perturbed parabolic equations / G.I. Shishkin // East-West J.Numer. Math. - 1993. - V.1, № 2. - P.147 – 163.

REFERENCES

1. *Gaydaychuk V.V., Nosenko V.P., Khudolii S.M.* Mekhanika konstruksii vitroenerhetychnyh ustanovok: monohrafiia. Kyiv: Vydavnytstvo Ahrar Media Hrup, 2013. 263P.
2. *Gulyaev V.I., Gaydaychuk V.V., Nosenko V.P.* Skinchennoelementnyi analiz stiykosti kolivan lopatey VEU pri skladnomu obertanni // Promyslove budivnytstvo ta inzhenerni sporudy, – 2013. – No1. p. 8 – 13.
3. *Zayets' Yu.O.* Ekranuvannya rozryvnykh khvyl' sharom pruzhnoho seredovyscha. // Visnyk NTU, 2010. No.21. □ P.366 – 371.
4. *Kovalenko A.D.* Osnovyi termouprugosti. Kyiv: Naukova Dumka, 1970. – 239 P.
5. *Gulyayev, V. I., Lugovoi, P. Z., Zaets Yu. A.* Mechanics of rock systems under action of gravity and dynamic loads. Ivano-Frankivsk: GVUZ, 2014. 438 P.
6. *Mozhovoy V.V.* Povyshenie gidroizolyatsionnoy sposobnosti asfaltobetonnoho pokrytiya // Problemy mehaniki i stroitelstva transportnykh sooruzheniy: Trudy II Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Almaty. 2015. – P. 54-60.
7. *Novatskiy V.* Dinamicheskie zadachi termouprugosti. Moskva: Mir, 1970. – 256 P.
8. *Novatskiy V.* Teoriya uprugosti. Moskva: Mir, 1975 – 872 P.
9. *Shishkin G.I.* Approksimatsiya resheniy singulyarno vozmuschennykh kraevykh zadach s parabolicheskim pogranichnyim sloem // Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki, 1989. □ Vol.29, No. 7. □ p. 963 – 977.
10. *Chang N., Haues F.* Nelineynye singulyarno vozmuschennyye kraevyye zadachi. Moskva: Mir, 1988. – 247 P.
11. *Radovsky B., Mozgovoj V.* Ways to reduce low-temperature cracking of asphalt pavements // 4-th Eurobitum Symposium. Summaries and papers. Madrid, 4-9 oct. 1989. Vol. 1. – P. 571-575.
12. *Shishkin G.I.* Approksimatsiya resheniy singulyarno vozmuschennykh kraevykh zadach s parabolicheskim pogranichnyim sloem // Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki, 1989. - Vol.29, No. 7. - p. 963 – 977.

Gaidachuk V.V., Mozgovyy V. V., Zaiets Yu. O., Shevchuk L.V.

NUMERICAL MODELING OF THERMO-ELASTIC STATE HIGHWAY LAYERED OVERLAY

The problem about computer singulation of evolving the temperature and stress fields in the road overlays is started. The finite element models of the phenomena of the temperature propagation and stress fields formulation are created. It is shown that the deduced equations of thermo-conductivity are singularly perturbed. For this reason, the temperature fields, generated by evolution of the external heat perturbation, have the form of boundary effects, localized in a narrow zone of the road overlay. The object of the research is to elaborate mathematic models and numerical techniques for analysis of thermo-elastic stresses in layered heterogeneous road

overlays. The thermo-elastic model and finite element method are used for calculation of the temperature and stress fields in the layered nonhomogeneous elastic media.

The problem on thermo-elastic deforming of layered heterogeneous semispace, modeling the asphalt overlay of the automobile road, is considered. The finite element models of the phenomena for the temperature propagation and stress fields formulation are created. It is shown that the deduced equations of thermo-conductivity are singularly perturbed. For this reason, the temperature fields, generated by evolution of the external heat perturbation, have the form of boundary effects, located in the boundary zone of the system. It is established that the maximal normal stresses, conditioned by the similar temperature fields, are principally oriented in the directions of the automobile road axis line, while the shear stresses predominate in lateral direction.

The investigation results can be inculcated into the practice of design and building of the automobile road asphalt overlays.

Keywords: automobile road, asphalt overlay, temperature field, thermo-elastic deforming, layered nonhomogeneous semispace.

Гайдайчук В.В., Мозговой В.В., Заец Ю.А., Шевчук Л.В.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТОГО ПОКРЫТИЯ АВТОМОБИЛЬНОЙ ДОРОГИ

Поставлена задача о компьютерном моделировании эволюции полей температуры и напряжений в массиве дорожного покрытия. Построены конечно-элементные модели явлений распространения тепла и формирования вызванных им полей напряжений. Показано, что сформулированное уравнение теплопроводности является сингулярно возмущенным. В связи с этим поля температуры, вызванные эволюцией внешнего теплового возмущения, имеют вид краевых эффектов, локализованных в узкой зоне свободной поверхности покрытия.

Ключевые слова: автомобильные дороги, асфальтобетонное покрытие поле температур, термо-упругое деформирование, слоисто-неоднородное полупространство.

УДК 539.3

Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Засць Ю.О., Шевчук Л.В.

Чисельне моделювання термонапруженого стану шаруватого покриття автомобільної дороги // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 56-71.

Поставлена задача про комп'ютерне моделювання еволюції полів температури та напружень в масиві дорожнього покриття. Побудовані скінченно-елементні моделі явищ поширення тепла і формування викликаних ним полів напружень.

Лл. 11. Бібліогр. 12 назв.

Gaidaichuk V.V., Mozgoviy V. V., Zaiets Yu. O., Shevchuk L.V. Numerical modeling of thermo-elastic state highway layered overlay // Strength of Materials and Theory of structures. – 2017. – Issue 98. – P. 56-71.

The problem about computer singulation of evolving the temperature and stress fields in the road overlays is started. The finite element models of the phenomena of the temperature propagation and stress fields formulation are created.

Гайдайчук В.В., Мозговой В.В., Заец Ю.А., Шевчук Л.В. Численное моделирование термонапряженного состояния слоистого покрытия автомобильной дороги // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 98. – С. 56-71.

Поставлена задача об определении напряжено-деформированного состояния слоистого дорожного массива под действием транспортных нагрузок.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Гайдайчук Віктор Васильович
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, Гайдайчуку Віктору Васильовичу.
Мобільний тел.: +38(097) 542-94-27
E-mail: viktor_gaydaychuk@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри дорожньо-будівельних матеріалів і хімії Мозговий Володимир Васильович
Адреса робоча: 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, Мозговому Володимиру Васильовичу
Мобільний тел.: +38(050) 506-25-64
E-mail: mozgovyy@gmail.com

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Засць Юлія Олександрівна
Адреса робоча: 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, Засць Юлії Олександрівні
Мобільний тел.: +38(097) 971-23-51
E-mail: yzaets@gmail.com

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, асистент кафедри вищої математики Шевчук Людмила Володимирівна
Адреса робоча: 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, Шевчук Людмилі Володимирівні
Мобільний тел.: +38(066) 715-36-33
E-mail: Ludmilashevchuk25@gmail.com

УДК 539.3

АНАЛІЗ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНОК НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ З ВИКОРИСТАННЯМ РЕДУКОВАНОЇ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОЇ МОДЕЛІ

О.П. Кривенко¹,
канд. техн. наук

А.Д. Легостаєв¹,
канд. техн. наук

Н.А. Гречух¹

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Запропоновано алгоритм дослідження динамічних характеристик неоднорідних оболонок з використанням редукованої скінченно-елементної моделі, що побудована за методом базисних вузлів. Ефективність розробленого методу продемонстровано на прикладі визначення власних коливань циліндричної консольної панелі.

Ключові слова: тонка пружна оболонка неоднорідної структури, універсальний скінченний елемент, редукована модель, коливання.

Вступ. Вивчення динамічної поведінки конструкцій має важливе значення для проектування будівельних конструкцій, енергетичного обладнання, авіаційної техніки та інше. Особливо це стосується оболонкових конструкцій, які за умов малої маси і великої жорсткості є чутливими до дії динамічних навантажень навіть невеликої інтенсивності.

До теперішнього часу є безліч публікацій, присвячених розрахунку різноманітних оболонкових систем, кількість яких за останнє десятиріччя значно зросла [1-31]. Серед них велика увага приділена вивченню пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини. Незважаючи на інтенсивні дослідження, що проводяться в останні роки, залишається ще багато нез'ясованих питань і невирішених проблем в області вивчення поведінки оболонкових конструкцій при динамічному навантаженні.

Постановка задачі. В останній час основним засобом вивчення поведінки різних оболонкових конструкцій при дії динамічних навантажень стало чисельне математичне моделювання. Застосування методу скінченних елементів щодо розв'язання таких задач потребує створення дискретних моделей з великим числом степенів вільності для забезпечення достовірної апроксимації геометричних і фізичних характеристик моделей. Стосовно задач про власні коливання оболонкових конструкцій, які є невід'ємною складовою частиною задач

динаміки, практичну цінність має лише частина спектру власних коливань, починаючи з нижчих частот. У зв'язку з цим виникає потреба у побудові редукованих моделей, число степенів вільності яких істотно менше ніж вихідної дискретній скінченно-елементній моделі оболонки (СЕМО), але при цьому нижча частина спектра власних частот вихідної і редукованої моделей збігаються.

Для оболонок тонких, середньої та ступінчасто-змінної товщини має сенс використовувати універсальні СЕ, співвідношення для яких побудовані на основі загально визнаної моментної схеми скінченних елементів [19]. Метою роботи є застосування в існуючій скінченно-елементній методиці розрахунку неоднорідних оболонок, яка спирається на використання універсального просторового СЕ з додатковими змінними параметрами [1-2], методу базисних вузлів [22] для отримання редукованих розв'язувальних рівнянь динаміки оболонок неоднорідної структури. Ефективність розробленого методу доведена на класичному тестовому прикладі – визначення власних коливань циліндричної консольної панелі.

Вихідні положення та постановка задачі. Тонкі неоднорідні оболонки розглядаються у роботі з позицій просторової теорії пружності з використанням апарата тензорного числення [1-2]. Під неоднорідністю оболонки розуміється: 1) наявність геометричних особливостей за товщиною оболонки у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зломами серединної поверхні та отворами; 2) різні умови закріплення контуру на різних ділянках оболонки.

Побудова рівнянь руху виконується на основі принципу можливих переміщень у поєднанні з принципом Даламбера [5, 7, 19-20]. Згідно з цим принципом рух системи з ідеальними в'язями відбувається так, що в будь-який момент часу сума робіт усіх активних сил і сил інерції на можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Для суцільного середовища, модель якого приймається за базову, сили інерції є масовими силами, які дорівнюють за величиною добутку густини матеріалу на прискорення точки. Таким чином, сили інерції можуть бути визначені як вектор

$$\{Q^{in}\} = -\rho \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} = -\frac{\gamma}{g} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\},$$

де ρ – питома густина, γ – питома вага, g – прискорення вільного падіння.

Після додавання сил інерції до масових сил отримуємо вихідне варіаційне рівняння для дослідження динамічного деформування, яке при скінченно-елементній апроксимації має вигляд

$$\sum_{FE} (\delta W_{FE} - (\delta T_{FE} + \delta A_{FE})) = 0, \quad (1)$$

де T_{FE} , W_{FE} та A_{FE} – робота сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил СЕ, відповідно; \sum_{FE} – сума за скінченними елементами СЕМО.

Співвідношення для обчислення віртуальної роботи внутрішніх сил СЕ $\delta W_{FE} = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV_{FE}$ та поверхневих і масових зовнішніх активних сил, що віднесені до вузлів СЕ $\delta A_{FE} = \int_{V_{FE}} P^i \delta u^i dV_{FE}$, для багат шарового скінченного елемента наведено в [1-2]. У задачах статки δW_{FE} фігурує як мінімізований функціонал. З нього після лінеаризації отримується матриця жорсткості СЕ $[K]_{FE}$.

Віртуальну роботу сил інерції СЕ визначаємо як

$$\delta T_{FE} = - \int_{V_{FE}} \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} \delta u^i dV_{FE} = - \int_{V_{FE}} \rho \dot{u}^i \delta u^i dV_{FE}, \quad (2)$$

де вузлові переміщення u^i є функціями часу. З (2) отримується матриця мас СЕ $[M]_{FE}$, яка характеризує інерційні властивості елемента. Визначення матриці мас багат шарового СЕ наведено в [21].

Для побудови СЕМО конструкції застосовано розроблений в [1-2] модифікований (універсальний) просторовий СЕ з полілінійними функціями форми, використання якого поширено на задачі динаміки. Метод [1-2] ґрунтується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, скінченно-елементному формулюванні задачі у приростах і використанні моментної схеми скінченних елементів. Метод призначений для чисельного дослідження статичних процесів геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких неоднорідних оболонок, що знаходяться в умовах складного термосилового навантаження. При розробці методу використана модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Розроблено просторовий модифікований (універсальний) скінченний елемент з додатковими змінними параметрами, на базі якого створена єдина розрахункова модель, що враховує геометричні особливості конструктивних елементів та неоднорідності матеріалу тонкої оболонки: змінність товщини, злами і гранованість обшивки, ребра, накладки, виїмки, отвори, вставки, багат шарову структуру матеріалу.

Достовірність методу [1-2] підтверджена чисельними дослідженнями збіжності та точності розв'язків для різних класів пружних неоднорідних оболонок.

Процедура інтегрування та лінеаризації рівняння (1) здійснюється звичним для МСЕ чином. У результаті отримуємо розв'язувальну систему рівнянь у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$[M]\{\overset{t}{\ddot{u}}\} + [K]\{\overset{t}{u}\} - \{\overset{t}{P}\} = 0, \quad (3)$$

де $\{u\}$, $\{\ddot{u}\}$ – N -вимірні вектори узагальнених переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі конструкції (N – загальне число степенів вільності моделі); $[M]$ – матриця мас усієї моделі конструкції, яка характеризує інерційні властивості оболонки; $[K]$ – матриця жорсткості СЕМО; $\{P\}$ – вектор узагальнених вузлових сил; верхній лівий значок « t » показує залежність векторів від часу.

Для того щоб розв'язок системи (3) мав сенс, необхідно задати початкові умови, які повинні визначати у початковий момент часу (без втрати загальності – у нульовий момент часу) поле переміщень $\{\overset{0}{u}\}$ і швидкостей $\{\overset{0}{\dot{u}}\}$, тобто

$$\{\overset{t}{u}\}\Big|_{t=t_0} = \{\overset{0}{u}\}, \quad \{\overset{t}{\dot{u}}(t)\}\Big|_{t=t_0} = \{\overset{0}{\dot{u}}\}. \quad (4)$$

Побудова розв'язувальних рівнянь для редукованої моделі СЕМО за методом базисних вузлів. Для випадку конструкцій регулярної структури створено алгоритми [20, 32], що реалізують процес ітерацій з деякою частиною власних векторів зі спектру власних коливань вихідної дискретної моделі при забезпеченні щільності нижчої частини спектру. У процесі ітерацій забезпечуються умови ортогональності власних векторів, кількість яких заздалегідь призначено. Ці вектори утворюють своєрідний підпростір. Розмірність векторів, що його складають, відповідає числу степенів вільності вихідної дискретної моделі. Таким чином, задача щодо власних коливань реалізується без зменшення просторової апроксимації області, що рухається. Число ітерацій залежить від початкового значення власних векторів. Процес швидко завершується, якщо наближені значення векторів початкового етапу ітерацій є достатньо близькими до реальних значень власних векторів, що необхідно визначити.

Для забезпечення зазначеної умови щодо початкового значення власних векторів, побудуємо наближені вектори власних коливань за методом базисних вузлів [22, 23], який не пов'язаний зі способом дискретизації вихідної задачі. У даній роботі метод набув розвитку

стосовно скінченно-елементної моделі оболонкової конструкції неоднорідної структури. Суть методу полягає у наступному.

При використанні в (3) функцій переміщень $\{u\}$ як розв'язувальних, будується редукована модель вихідної дискретної моделі, число степенів вільності якої Ω відповідає числу переміщень деякої сукупності вузлів (за вибраними напрямками) з повного набору СЕМО. Переміщення цих вузлів будемо називати новими узагальненими координатами $\{q\}$, а вибрані вузли – базисними (або опорними) вузлами редукованої СЕМО. Отже, зв'язок між невідомими переміщеннями вихідної СЕМО $\{u\}$ та новими невідомими – узагальненими координатами редукованої СЕМО $\{q\}$, визначається за формулою

$$\{^t u^k\} = [U_{kr}] \{^t q^r\}, \quad k = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, \Omega}, \quad (5)$$

де $\{^t u\}$ – вектор переміщень вихідної СЕМО; $\{^t q\}$ – вектор нових узагальнених координат редукованої СЕМО; $[U]$ – матриця перетворень; N і Ω – число степенів вільності вихідної та редукованої моделей.

Згідно з методом [22, 23] компонентами матриці $[U]$ є так звані базисні вектори. Переміщення базисних вузлів редукованої моделі повинні бути можливими та незалежними. Забезпечення лінійної незалежності нових узагальнених координат реалізується за допомогою накладання абсолютно жорстких в'язей за напрямком переміщень базисних вузлів. Зазначимо, що СЕМО з додатковими в'язями у виділеній сукупності вузлів схожа по суті з основною системою класичного методу переміщень, який використовується для розрахунку стержневих конструкцій.

Побудова базисних векторів виконується шляхом розв'язання основної системи на змушені одиничні переміщення накладених в'язей у базисних вузлах моделі. Тобто алгоритм побудови базисних векторів ґрунтується на розв'язанні лінійної системи алгебраїчних рівнянь МСЕ, що складена для дискретної моделі фрагмента з накладеними в'язями від одиничних змушених зміщень у напрямку можливих переміщень вузлів, що прийняті за нові узагальнені координати цієї редукованої моделі.

Число компонент базисних векторів, що входять до складу матриці перетворень $[U]$ у (5), збігається з числом степенів вільності СЕМО конструкції. Отже, кількість рядків матриці перетворень $[U]$ дорівнює числу степенів вільності вихідної СЕМО N , а кількість стовпчиків – кількості узагальнених координат редукованої моделі Ω . Таким чином,

побудова редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації вихідної СЕМО.

Рівняння руху редукованої моделі отримується шляхом підстановки змінних (5) у рівняння руху (3)

$$[\tilde{M}]\{^t\dot{q}\} + [\tilde{K}]\{^tq\} - \{^t\tilde{P}\} = 0, \quad (6)$$

де

$$[\tilde{M}] = [U]^T [M][U], \quad (7)$$

$$[\tilde{K}] = [U]^T [K][U], \quad (8)$$

$$\{^t\tilde{P}\} = [U]^T \{^tP\}, \quad (9)$$

– відповідно матриці мас і жорсткості, які характеризують рух редукованої моделі, та вектор узагальнених сил для нової моделі. Правий верхній значок « T » означає транспоновану матрицю.

Відповідно до (4) невідомі шукані функції $\{^tq\}$ мають задовольняти початковим умовам при $t = t_0$

$$\{^{t=t_0}q\} = \{^{t_0}q\}, \quad \{^{t=t_0}\dot{q}\} = \{^{t_0}\dot{q}\}, \quad (10)$$

або, не втрачаючи загальності, при $t = 0$

$$\{^{t=0}q\} = \{^0q\}, \quad \{^{t=0}\dot{q}\} = \{^0\dot{q}\}. \quad (10')$$

На рис. 1 на прикладі трьох базисних вузлів показано вигляд базисних векторів для вибраної системи базисних вузлів. Тут (а) прийнята схема базисних вузлів, (б) – перший базисний вектор, (в) – другий базисний вектор, (г) – третій базисний вектор. Інші базисні вектори визначаються за аналогічною схемою.

Слід відзначити, що застосування методу базисних вузлів до задач динаміки оболонкових конструкцій є ефективним інструментом, який дає змогу в рамках єдиного алгоритму істотно розширити можливості метода переміщень при побудові розв'язків задачі методом скінченних елементів. Цей факт буде застосовано у подальшому при дослідження нестационарних коливань оболонок від дії ударних та імпульсних навантажень.

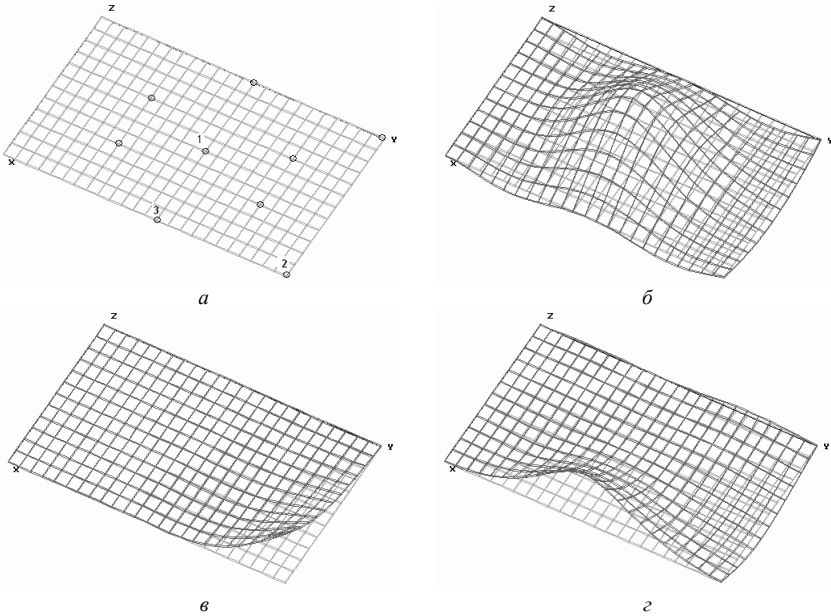


Рис. 1

Результати розрахунку вільних коливань циліндричної панелі за методом базисних вузлів та аналіз розв'язків. Розглядається тестова задача про коливання консольної циліндричної панелі (рис. 2). Оболонка жорстко закріплена по криволінійному контуру. Постановка задачі та вихідні данні взяті з роботи [7]. Уперше експериментально та чисельно ця задача була досліджена в роботах [24, 25]. Надалі задача використовувалася дослідниками для тестової апробації різних скінченних елементів у задачах динаміки.

Вихідними геометричними даними є: розмір панелі у плані $L = S = 0,3048 \text{ м}$, радіус кривизни $R = 0,6096 \text{ м}$, товщина панелі $h = 0,003048 \text{ м}$; характеристики матеріалу такі: модуль пружності $E = 0,2 \cdot 10^{12} \text{ Н/м}^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, питома густина $\rho = 0,704 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$.

Результати розрахунків та їх аналіз подані у вигляді табл. 1-3 та рис. 3. Спочатку задача була розв'язана методом ітерації підпростору (МПП), як найбільш розробленого і апробованого, для нередукованої СЕМО з метою аналізу та подальших порівнянь розв'язків, отриманих за методом базисних вузлів, та оцінки їхньої точності.

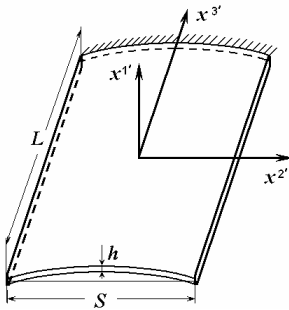


Рис. 2

У табл. 1 наведено збіжність розв'язків задачі для восьми нижчих частот, що отримані за МП. Порівняння виконано з розв'язком при сітці 30×30 СЕ. Видно, що для розглянутих частот гарний результат дає використання рідкої сітки 10×10 СЕ. Для СЕМО з розбиттям 15×15 СЕ різниця не перевищує 2%, а для сітки 20×20 СЕ – 0,78%.

Таблиця 1

Збіжність розв'язків для консольної циліндричної панелі за методом ітерацій підпростору для нередукованої СЕМО

№	СЕМО – СЕ						
	10×10 , Гц	Δ , %	15×15 , Гц	Δ , %	20×20 , Гц	Δ , %	30×30 , Гц
1	90,229	0,82	89,839	0,38	89,658	0,005	89,494
2	146,08	0,75	145,50	0,35	145,23	0,16	144,99
3	260,86	1,85	257,96	0,72	256,91	0,31	256,11
4	365,73	2,21	361,13	0,92	359,28	0,41	357,82
5	407,09	1,66	403,32	0,72	401,74	0,32	400,45
6	570,28	5,23	552,05	1,86	546,17	0,78	541,92
7	790,99	4,28	772,56	1,83	764,56	0,78	758,65
8	794,19	4,25	773,31	1,51	766,68	0,64	761,78

У табл. 2, 3 наведено збіжність розв'язків задачі, що отримані методом базисних вузлів, для вихідної СЕМО з сітками 20×20 і 30×30 СЕ. Порівняння виконано з відповідним розв'язком, що знайдено при використанні методу ітерацій підпростору (табл. 1). Аналіз збіжності виконано за кількістю базисних вузлів (БВ). Оскільки задана кількість базисних вузлів визначає степінь вільності редукованої СЕМО, тому отримані результати демонструють ефективність розробленого методу.

1. Для нередукованої СЕМО з сіткою 20×20 СЕ використання лише 12 БВ для побудови редукованої моделі дає похибку меншу за 10% при визначенні п'яти перших частот, збільшення кількості базисних вузлів до 20 дозволяє значно підвищити точність знаходження спектру з 8 нижчих частот.

2. Для сітки 30×30 СЕ збільшення кількості базисних вузлів з 20 до 30 дозволяє визначити частоти з достатньою точністю.

3. Для отримання усього заданого спектру нижчих частот із задовільною точністю збільшення вихідної сітки передукованої СЕМО вимагає збільшення кількості БВ, що можна пояснити необхідністю нанесення вибраного каркасу БВ, яка б рівномірно охоплювала усю СЕМО.

Таблиця 2

Збіжність розв'язків за кількістю базисних вузлів при сітці 20×20 СЕ за методом базисних вузлів

№	СЕМО – 20×20 СЕ						
	12 БВ, Гц	Δ , %	16 БВ, Гц	Δ , %	20 БВ, Гц	Δ , %	МПП, Гц
1	90,153	0,55	89,850	0,21	89,809	0,17	89,658
2	147,18	1,34	146,04	0,56	145,84	0,42	145,23
3	268,00	4,32	263,79	2,68	259,58	1,04	256,91
4	380,71	5,96	373,96	4,09	367,91	2,40	359,28
5	433,42	7,88	420,75	4,73	414,52	3,18	401,74
6	616,37	12,85	580,31	6,25	568,21	4,03	546,17
7	938,02	22,69	842,61	10,21	827,73	8,26	764,56
8	962,32	25,52	853,75	11,36	828,27	8,03	766,68

Таблиця 3

Збіжність розв'язків за кількістю базисних вузлів при сітці 30×30 СЕ за методом базисних вузлів

№	СЕМО – 30×30 СЕ								
	12 БВ, Гц	Δ , %	16 БВ, Гц	Δ , %	20 БВ, Гц	Δ , %	30 БВ, Гц	Δ , %	МПП, Гц
1	90,241	0,83	90,237	0,83	89,547	0,06	89,547	0,06	89,494
2	147,55	1,77	147,47	1,71	147,18	1,51	145,20	0,14	144,99
3	262,60	2,53	259,28	1,24	258,79	1,05	257,60	0,58	256,11
4	395,48	10,53	389,06	8,73	380,66	6,38	361,80	1,11	357,82
5	437,32	9,21	428,25	6,94	421,33	5,21	406,06	1,40	400,45
6	604,73	11,59	603,60	11,38	600,38	10,79	556,80	2,75	541,92
7	918,74	21,10	874,63	15,29	830,63	9,49	789,31	4,04	758,65
8	1060,2	39,17	1004,3	31,83	870,24	14,24	826,87	8,54	761,78

У табл. 4 поряд з даними експерименту [24, 25], результатами розрахунків, отриманих у [7], і авторами за МССЕ наводяться результати

для п'яти власних частот, що отримані в роботах інших авторів [24-31], посилання за роботою [7]. Видно, що розрахунки, які отримані авторами за МССЕ, добре узгоджуються з результатами експерименту та даними інших авторів.

Таблиця 4

Порівняння розв'язків, що отримані різними авторами

№ тону	Експеримент [24, 25], Гц	сітка 20×20 [7], Гц	сітка 30×30 [7], Гц	сітка 30×30 [МССЕ], Гц
1	85,60	89,5	91,8	89,494
2	134,50	144	149	144,99
3	258,90	258	273	256,11
4	350,60	359	388	357,82
5	395,20	406		400,45
№ тону	G. Lindberg M. Olson [24], Гц	G. Lindberg M. Olson [25], Гц	М.Н. Серазутдінов [26], Гц	М.А. Bossak, О.С. Zienkiewicz [27], Гц
1	93,50	86,60	83,40	88,30
2	147,60	139,20	133,80	142,80
3	255,10	251,30	238,10	257,60
4	393,10	348,60	334,00	369,20
5	423,50	393,40	377,00	441,80
№ тону	Я.Г. Савула [28], Гц	S. Ahmad та ін., [29], Гц	R.P. Walker [30], Гц	С.І. Богомолов та ін. [31], Гц
1	85,10	113,00	88,60	84,90
2	138,00	147,00	140,90	138,20
3	251,70	296,00	252,60	248,70
4	344,80	440,00	371,50	349,90
5	404,90	475,00	423,20	419,10

Отримані власні форми коливань (рис. 3) збігаються з відповідними формами, що наведені в роботі [7]. Форми, що відповідають першим восьми частотам власних коливань панелі, представлені для СЕМО з сіткою 20×20 СЕ. Для кожної форми нижній правий край є жорстко затиснутим.

Висновки. На базі модифікованого ізопараметричного просторового скінченного елемента з полілінійними функціями форми розроблено скінченно-елементний метод визначення власних коливань оболонки неоднорідної структури. Алгоритм визначення частот і форм коливань оболонки побудовано на базі розробленого методу дослідження оболонки

з геометричними особливостями за товщиною та застосуванні редукованих моделей, що будуються за методом базисних вузлів.

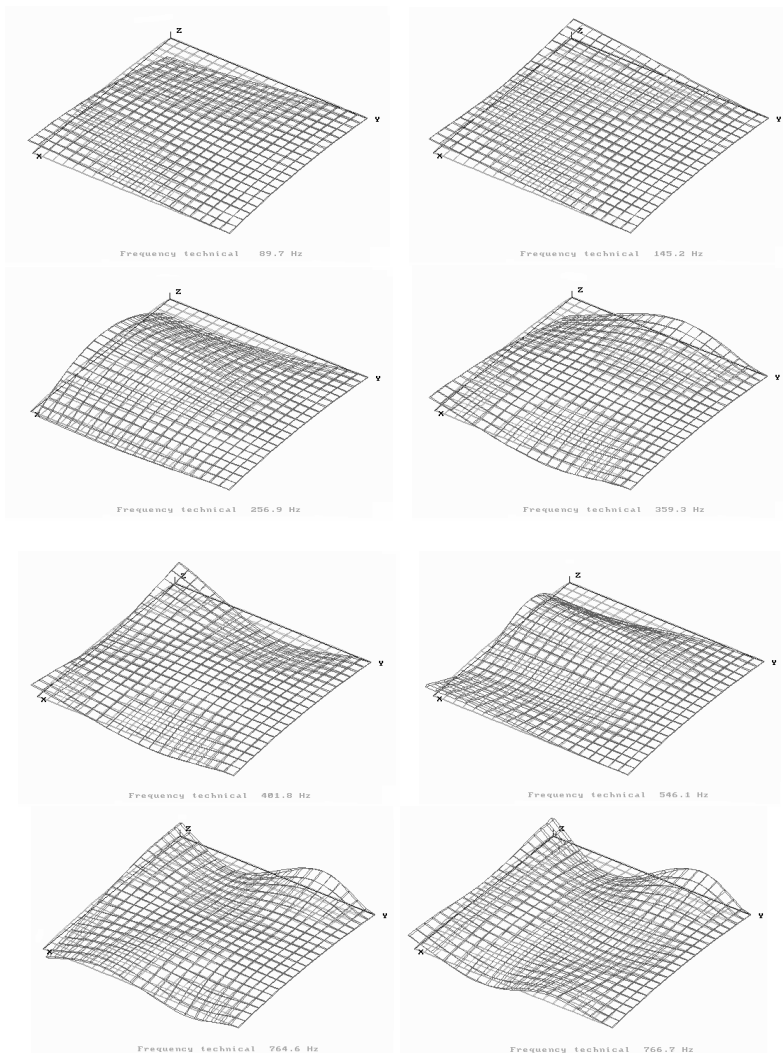


Рис. 3

На прикладі тонкої консольної циліндричної панелі досліджено збіжність розв'язків та проведено порівняння з результатами, отриманими експериментально та іншими авторами.

Проведені дослідження дозволили на прикладі консольної циліндричної панелі виявити особливості побудови редукованої моделі за методом базисних вузлів – вибір кількості та каркасу базисних вузлів.

Показано, що застосування методу базисних вузлів до задач динаміки оболонкових конструкцій є ефективним інструментом, який дає змогу в рамках єдиного алгоритму істотно розширити можливості метода переміщень при побудові розв'язків задачі методом скінченних елементів. Розроблений метод може бути застосовано в методі ітерацій підпростору як спосіб задавання достатньо близьких до реальних значень власних векторів для початкового етапу ітерацій зазначеного методу з метою пришвидшення його роботи.

Крім того, метод базисних вузлів може бути застосований самостійно для наближеної оцінки розв'язків щодо нестационарних коливань оболонкових конструкцій. Тому наступним етапом роботи є застосування методу базисних вузлів для розробки методу дослідження поведінки тонких оболонок неоднорідної структури при дії короткочасного навантаження типу імпульсного.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
3. *Баженев В.А., Кривенко О.П., Легостаев А.Д.* Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С. 96-113.
4. *Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість і власні коливання сферичної панелі при зміні умов комбінованого закріплення контуру // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 96. – С. 48-65.
5. *Аганов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. – Учебное пособие / М : Изд. АСВ, 2000. – 152 с.
6. *Якушев В.Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. - М.: Наука, 2004. – 276 с.
7. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
8. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition – CRC Press, 2006. – 568 p.
9. *Кукуджанов С.Н.* Колебания и динамическая устойчивость оболочек вращения, близких к цилиндрическим, находящихся под действием нормального давления и меридиональных усилий // Известия РАН. Механика твердого тела, 2006. – №2. – С. 48-59.

10. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
11. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // *International Applied Mechanics*, 2009. – Vol 45, № 3. – Pp. 245-271.
12. *Карнов В.В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.; Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 248 с.
13. *Жгутов В.М.* Математическое и компьютерное моделирование нелинейных свободных колебаний упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины // *Инженерно-строительный журнал*, 2010. – №4. – С. 38-48.
14. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.
15. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.* Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // *Strength of Materials*, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
16. *Николаев А.П., Ключков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А.* Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек: монография – Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. – 264 с.
17. *Ghanbari Ghazijahani T., Showkati H.* Locally imperfect conical shells under uniform external pressure // *Strength of Materials*, 2013. – Vol., No. 3. – Pp. 369-377.
18. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
19. *Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский и др.* – К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. – 480 с.
20. *Баженов В.А.* Вариційні принципи і методи будівельної механіки: Підручник. – Київ: Каравела, 2012. – 720 с.
21. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Матриця мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 114-125.
22. *Кислокий В.Н., Легостаев А.Д.* Реализация метода конечных элементов в задачах исследования свободных колебаний оболочек и пластин // *Опір матеріалів і теорія споруд*, – Київ: Будівельник, 1974. – Вип. 27. – С. 24-32.
23. *Легостаев А.Д., Гречух Н.А.* Деякі задачі динаміки оболонкових конструкцій // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 78-86.
24. *Cowper G.R., Lindberg G.M., Olson M.D.* A shallow shell finite element of triangular shape // *Int. J. Solids and Structures*, 1970. – V.6, №8. – P. 1133-1156.
25. *Olson M.D., Linberg G.M.* Vibration analysis of cantilever plates, using a new cylindrical shell finite elements // *Pros of 2nd Conf. math. strut. mech., AF base Wright. Peterson. Otto*, 1968. – P. 247-269.
26. *Серзутдинов М.Н.* Статика и динамика тонкостенных элементов конструкций сложной геометрии // *Дисс. на соискание ученой степени доктора физ. мат наук.*
27. *Bossak M.A., Zienkiewicz O.C.* Free vibration of initially stressed solids with particular referents to centrifugal force in rotation machinery // *J.Strain Anal.* – 1973. – V.8, №4. – P. 245-252.
28. *Савула Я.Г., Флейшман Н.П.* Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями. – Львов: Вища школа., 1990. – 170 с.
29. *Ahmad S., Anderson R.G., Zienkiewicz O.C.* Vibration of thick curved shells, with particular reference to turbine blades // *J. Strain Anal.* – 1970. – V.5, № 3. – P. 200-206.
30. *Walker R.P.* Vibration of cambered helicoidally fan blades // *J. Sound Vibr.* – 1978. – V 59, № 1. – P. 35-57.

31. Богомолов С.И., Луценко С.С., Назаренко С.А. О применении суперпараметрического оболочечного конечного элемента к расчету колебаний лопаток турбомашин // Проблемы прочности. – 1982. – № 6. – С. 71-74.
32. Бате К., Вилсон Р. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey M.O. Nelineinye deformiruyannya ta stiykist pruzhnikh obolonok neodnorodnoyi strukturi. – K.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
2. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoyi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi. – M.: Knizhnyiy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
3. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., LegostaEv A.D. Stiykist i vlasni kolivannya neodnorodnih obolonok z urahuvannam napruzhenogo stanu // Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-teh. zbirn. – K.: KNUBA, 2015. – Vyp. 95. – S. 96-113.
4. Krivenko O.P. Vpliv nagrivu na stiykist i vlasni kolivannya sferichnoyi paneli pri zmini umov kombinovanogo zakriplennya konturu // Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-teh. zbirn. – K.: KNUBA, 2015. – Vyp. 96. – S. 48-65.
5. Agapov V.P. Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti prostranstvennykh tonkostennykh podkreplennykh konstruksiy. – Uchebnoe posobie / M : izd. ASV, 2000. – 152 s.
6. Yakushev V.L. Nelineynyye deformatsii i ustoychivost tonkih obolochek. M.: Nauka, 2004. - 276 s.
7. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy. – M.: FIZMATLIT, 2006. - 392 s.
8. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition - CRC Press, 2006. - 568 p.
9. Kukudzhanyan S.N. Kolebaniya i dinamicheskaya ustoychivost obolochek vrascheniya, blizkikh k tsilindricheskim, nahodyaschihsya pod deystviem normalnogo davleniya i meridionalnykh usilii // Izvestiya RAN. Mehanika tverdogo tela, 2006. – N2. – S. 48-59.
10. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
11. Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol 45, № 3. – Pp. 245-271.
12. Karpov V.V. Prochnost i ustoychivost podkreplennykh obolochek vrascheniya. V 2-h ch. Ch.1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrascheniya. FIZMATLIT, 2010. – 288 s.; Ch.2. Vyichislitelnyy eksperiment pri staticheskom mehanicheskom vozdeystvii. – M.: FIZMATLIT, 2011. – 248 s.
13. Zhgutov V.M. Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie nelineynykh svobodnykh kolebaniy uprugih plogykh obolochek stupenchato-peremennoy tolschiny // Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal, 2010. – N4. – S. 38-48.
14. Chapelle D., Bathe K.J. The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. - Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.
15. Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A. Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // Strength of Materials, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
16. Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A. Vektornaya interpoliyatsiya poley peremescheniy v konechno-elementnykh raschetah obolochek: monografiya – Volgograd: FGBOU VPO Volgogradskiy GAU, 2012. – 264 s.

17. *Ghanbari Ghazijahani T., Showkati H.* Locally imperfect conical shells under uniform external pressure // *Strength of Materials*, 2013. – Vol., No. 3. – Pp. 369-377.
18. *Volmir A.S.* Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek. – M.: Nauka, 1972. – 432 s.
19. Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel / *A.S. Saharov, V.N. Kislookiy, V.V. Kirichevskiy i dr.* – K.: Vischa shk. Golov. izd-vo, 1982. – 480 s.
20. *Bazhenov V.A.* Variatsiyni printsiipi i metodi budivelnoyi mehaniki: Pidruchnik. – Kiyiv: Karavela, 2012. – 720 s.
21. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey M.O.* Matritsya mas modifikovanogo prostorovogo skinchenogo elementa neodnorodnoyi obolonki // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-teh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2013. – Vyp. 91. – S. 114-125.
22. *Kislookiy V.N., Legostaev A.D.* Realizatsiya metoda konechnykh elementov v zadachah issledovaniya svobodnykh kolebaniy obolochek i plastin // *Opir materialiv i teoriya sporud*, – Kiyiv: Budivelnik, 1974. – Vyp. 27. – S. 24-32.
23. *Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A.* Deiaki zadachi dynamiky obolonkovykh konstruksii // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2012. – Vyp. 89. – C. 78-86.
24. *Cowep G.R., Lindberg G.M., Olson M.D.* A shallow shell finite element of triangular shape // *Int. J. Solids and Structures*, 1970. – V.6, №8. – P. 1133-1156.
25. *Olson M.D., Linberg G.M.* Vibration analysis of cantilever plates, using a new cylindrical shell finite elements // *Pros of 2nd Conf. math. strut. mech., AF base Wright. Peterson. Otto*, 1968. – P. 247-269.
26. *Serazutdinov M.N.* Statika i dinamika tonkostennykh elementov konstruksiy slozhnoy geometrii // *Diss. na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiz. mat nauk.*
27. *Bossak M.A., Zienkiewicz O.C.* Free vibration of initially stressed solids with particular referents to centrifugal force in rotation machinery // *J. Strain Anal.* – 1973. – V.8, №4. – P. 245-252.
28. *Savula Ya.G., Fleyshman N.P.* Raschet i optimizatsiya obolochek s reznymi srednyimi poverhnostyami. – Lvov: Vischa shkola., 1990. – 170 s.
29. *Ahmad S., Anderson R.G., Zienkiewicz O.C.* Vibration of thick curved shells, with particular reference to turbine blades // *J. Strain Anal.* – 1970. – V.5, № 3. – P. 200-206.
30. *Walker R.P.* Vibration of cambered helicoidally fan blades // *J. Sound Vibr.* – 1978. – V 59, № 1. – P. 35-57.
31. *Bogomolov S.I., Lutsenko S.S., Nazarenko S.A.* O primenenii superparametricheskogo obolochchnogo konechnogo elementa k raschetu kolebaniy lopatok turbomashin // *Problemyi prochnosti.* – 1982. – N 6. – S. 71-74.
32. *Bate K., Vilson R.* Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov. – M.: Stroyizdat, 1982. – 448 p.

Krivenko O.P., Legostaev A.D., Hrechuh N.A.

ANALYSIS OF NATURAL VIBRATIONS OF SHELLS WITH INHOMOGENEOUS STRUCTURE USING REDUCED FINITE ELEMENT MODEL

The method of creating the reduced governing equations for the existing finite element method of calculation of thin elastic shells with different geometric characteristics according to the thickness is considered. The method of investigating inhomogeneous shells is based on the uniform methodological positions of the 3-d geometrically nonlinear theory of thermoelasticity and the finite-element method in the form of the moment finite-element scheme. Thus, thin multilayer shells of variable thickness and complex geometry are considered as three-dimensional bodies that can be reinforced with ribs and cover plates, weakened by cavities, channels, and holes, and have sharp bends in the mid-surface.

Two hypotheses are used to describe the stress-strain state of a thin inhomogeneous shell. The nonclassical kinematic hypothesis of deformed straight line: though stretched or shortened during deformation, a straight segment along the thickness remains straight. This segment is not necessarily normal to the mid-surface of the shell. The displacements are assumed distributed linearly along the thickness, which is conventional in the theory of thin shells. The static hypothesis compressive assumes that the stresses in the fibers are constant throughout the thickness of the shell.

The effectiveness of the developed method is demonstrated by determining the oscillation of a cylindrical cantilever panel. It is investigated the convergence of solutions and compared them with the results obtained experimentally and by other authors. It is shown that the application of the method of basic nodes to the problems of the dynamics of shell structures is an effective tool that allows, in the framework of a single algorithm, to significantly expand the capabilities of the displacement method when constructing solutions of the problem by the finite element method.

Key words: thin elastic shell of inhomogeneous structure, universal finite element, reduced model, oscillation.

Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А.

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕДУЦИРОВАННОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ

Предложен алгоритм исследования динамических характеристик неоднородных оболочек с использованием редуцированной конечно-элементной модели, построенной методом базисных узлов. Эффективность разработанного метода продемонстрирована на примере определения собственных колебаний цилиндрической консольной панели.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка неоднородной структуры, универсальный конечный элемент, редуцированная модель, колебание.

УДК 539.3

Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А. Аналіз власних коливань оболонок неоднорідної структури з використанням редукованої скінченноелементної моделі / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 72-88.

Розглянуто методику побудови редукованих розв'язувальних рівнянь для існуючого скінченноелементного методу розрахунку тонких пружних оболонок з різними геометричними особливостями за товщиною.

Табл. 4, Ил. 3, Библиогр. 32 назв.

Krivenko O.P., Legostaev A.D., Hrechuh N.A. Analysis of natural vibrations of shells with inhomogeneous structure using the reduced finite element model / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2017. – Issue 98. – P. 72-88. – Ukr.

The method of creating the reduced governing equations for the existing finite element method of calculation of thin elastic shells with different geometric characteristics according to the thickness is considered.

Tabl. 4, Fig. 3, Bibliograf. 32 ref.

Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А. Анализ собственных колебаний оболочек неоднородной структуры с использованием редуцированной конечно-элементной модели / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2017. – Вып. 98. – С. 72-88. – Укр.

Рассмотрена методика построения редуцированных разрешающих уравнений для существующего конечно-элементного метода расчета тонких упругих оболочек с различными геометрическими особенностями по толщине.

Табл. 4, Ил. 3, Библиогр. 32 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна

Мобільний тел.: +38(066) 048-32-77

E-mail: olakop@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА ЛЕГОСТАЄВ Анатолій Дмитрович

Мобільний тел.: +38(096) 340-59-18

E-mail: anat_leg@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА ГРЕЧУХ Наталія Анатоліївна

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29

Мобільний тел.: +38(097) 426-16-09

E-mail: natniism@ukr.net

УДК 539.3+511.1

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ АРМОВАНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ СКЛОПЛАСТИКУ

В.О. Бараненко¹,

д-р техн. наук, професор кафедри будівельної механіки

Д.Л. Волчок¹,

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

¹*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури*

Розглядається постановка оберненої задачі будівельної механіки - оптимального проектування ортотропної циліндричної оболонки зі склопластику, стисненої поздовжніми силами за критерієм матеріаломісткості з урахуванням обмежень за міцністю, місцевій та загальній втраті стійкості. Змінними проектування є товщина, радіус і відносний вміст армуючих волокон. Реалізація задачі виконана за допомогою методів множників Лагранжа і Монте-Карло. Наводяться результати чисельних експериментів. Розглянуто вплив нечіткого опису навантаження на оптимальний проект. Наводиться оцінка коефіцієнта надійності за навантаженням для деяких випадків інформаційних ситуацій щодо опису нечітких величин поздовжньої сили.

Ключові слова: обернена задача, циліндрична армована оболонка, нечіткі величини, оптимальне проектування конструкцій, невизначене програмування, нечітке моделювання.

1. Вступ

Завдання, що виникають в процесі оптимального проектування конструкцій, пов'язані з проблемою зниження матеріаломісткості та забезпечення їх високої надійності. Стосовно до споруд і конструкцій це означає гарантування їх неруйнування при експлуатації. Характерною особливістю великого числа опублікованих робіт з проектування конструкцій є те, що в них розглядаються прямі задачі будівельної механіки, в яких визначаються:

- характеристики напружено-деформованого стану елементів конструкції при заданих розмірах, геометрії і структурі елементів, зовнішніх впливах;

- запаси міцності і надійності. Для таких задач застосовуються найсучасніші методи механіки і прикладної математики.

Іншим типом задач будівельної механіки є обернені задачі, що дозволяють визначати геометричні параметри, характеристики структури, величини прикладених впливів і ін., виходячи з критеріїв несучої здатності, матеріаломісткості, надійності та інших вимог.

Однак бувають випадки, коли необхідно враховувати невизначену природу багатьох факторів, що впливають на роботу конструкції, які

обумовлюють випадковість, нечіткість і неточність опису частини вихідних даних.

Для компенсації можливих похибок і неточностей в завданні вихідних величин в практичному застосуванні вводяться коефіцієнти запасу, надійності. Вони призначаються відповідно до норм проектування, які в свою чергу, є інтуїтивними, отриманими відповідно до накопиченого досвіду без досить суворого на те обґрунтування. В цьому випадку принципово відмінними є їх постановка і методи дослідження. Для розв'язання їх необхідний такий математичний апарат, який мав би можливість апріорі враховувати ці невизначеності. Думка про терпимість проєктованої системи до наявності вихідних "грубих" ("сирих") даних приваблива. Тут під терпимістю (толерантністю) до невизначеного розуміється здатність системи переносити нечіткі, випадкові і неточні дані в класичні методи аналізу і прийняття рішень.

У даній роботі на основі методу множників Лагранжа оболонки реалізується задача нелінійної оптимізації стиснутої ортотропної циліндричної оболонки мінімального обсягу (маси) при виконанні умов несучої здатності. Розв'язання задачі в разі нечіткого завдання стискаючої сили проводиться із застосуванням інтервального підходу в теорії нечітких множин [1].

2. Об'єкт оптимізації

Розглянемо ортотропну кругову циліндричну шарнірно-обперту по кінцях оболонку з геометричними характеристиками: довжиною L , товщиною h і радіусом R . Конструкція виконана зі склопластику, армованого в двох напрямках з модулем пружності E . Будемо розглядати випадок, коли коефіцієнт об'ємного армування є сталим, а відносний вміст армуючих волокон в осьовому напрямку буде величиною змінною. В рамках лінійного наближення теорії армування з урахуванням того, що $E_a \gg E_c$ (E_a, E_c - відповідно модуль пружності армуючого матеріалу і сполучного), для модулів пружності оболонки E_1 і E_2 маємо наближені вирази [2]

$$E_1 = \theta E; E_2 = (1 - \theta) E, \quad (1)$$

які визначаються модулем пружності E і коефіцієнтом μ , θ - відносний вміст армуючих волокон в осьовому напрямку. Міцність матеріалу оболонки на стиск в осьовому напрямку характеризується величиною σ_0 .

Введемо в розгляд наближені вирази для трьох граничних станів оболонки [2,3]:

- критичного осьового зусилля P_{kp}^m при шарнірному закріпленні оболонки в припущенні достатньої зсувної жорсткості в трансверсальній

площині і площині оболонки;

- критичного осьового зусилля P_{kp}^c в разі шарнірно-опертого стержня з кільцевим перетином;

- міцності оболонки P_R на стиск силою F_* , відповідно за допомогою наступних співвідношень

$$P_{kp}^m \geq F_*, \quad P_{kp}^c \geq F_*, \quad P_R \geq F_*, \quad (2)$$

$$P_{kp}^m = Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}, \quad (3)$$

$$P_{kp}^c = Cx_1 x_2^3 x_3, \quad (4)$$

$$P_R = Dx_1 x_2 \sqrt[3]{x_3^2}, \quad (5)$$

$$B = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} E, \quad C = \frac{\pi^3 E}{L^2}, \quad D = 2\pi\sigma_0, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$x_1 = h, \quad x_2 = R, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = 1 - \theta,$$

$$x_5 = \sigma_0, \quad x_6 = E, \quad x_7 = L, \quad x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (6)$$

Співвідношення (2) - (6) утворюють фізичні обмеження

$$g_i(x) - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

$$\text{Тут } g_1(x) = \frac{F_*}{Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}}, \quad g_2(x) = \frac{F_*}{Cx_1 x_2^3 x_3}, \quad g_3(x) = \frac{F_*}{Dx_1 x_2 \sqrt[3]{x_3^2}}.$$

Перше обмеження в (2) визначає можливість місцевої втрати стійкості, а друге - можливість загальної втрати стійкості, як стержня. Третя нерівність в (2) визначає можливість руйнування конструкції при дії прикладеного навантаження [4].

Необхідно знайти такі значення змінних $x^{opt} = \{x_1^{opt}, x_2^{opt}, x_3^{opt}\}$, щоб за умови збереження стійкості і міцності оболонка мала мінімальний обсяг матеріалу (масу) $W(F_*, x)$.

У математичних термінах задача запишеться як:

$$x^{opt} = \arg \left\{ \min_x W(x) \mid g_i(x) - 1 \leq 0, i = 1, 2, 3; x_i > 0 \right\}, \quad (8)$$

$$W = Ax_1 x_2; \quad A = 2\pi\rho L.$$

Вона відноситься до класу задач нелінійного опуклого програмування [5], оскільки функції, що входять в (8), неперервні і задовольняють умовам опуклості

$$g_i \left[\lambda x^{(2)} + (1 - \lambda)x^{(1)} \right] \leq (\geq) \left(\lambda g_i(x^{(2)}) + (1 - \lambda)g_i(x^{(1)}) \right)$$

для $0 \leq \lambda \leq 1$; $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ - будь-які величини. У будівельній механіці таку

задачу називають оберненою, так як частина параметрів тут невідома.

При постановці оберненої задачі частина змінних x_i , $i = 1, 2, \dots, r$, на відміну від прямої задачі є шуканими, інша частина - відомі величини,

$$u_1 = x_{r+1}; u_2 = x_{r+2}; \dots; u_r = x_{m-r}, \quad r \leq m.$$

Напружено-деформований стан конструкції зумовлюється таким чином, щоб її робота була найбільш раціональною. У розглянутій задачі (8) шуканими змінними будуть $x_1 = h$, $x_2 = R$, $x_3 = \theta$, $r = 3$. Перевага обернених задач полягає в тому, що більшість з них допускають аналітичне розв'язання за допомогою традиційних методів будівельної механіки і прикладної математики для випадку, коли число обмежень m не перевищує числа невідомих параметрів r .

Ідея постановки оберненої задачі будівельної механіки була і є дуже плідною в теорії оптимального проектування конструкцій.

3. Метод множників Лагранжа

Складемо допоміжну функцію

$$L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x), \quad (9)$$

де $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ - невідомі множники Лагранжа, причому $0 \leq \lambda_j \leq 1$.

В результаті задачу знаходження умовного екстремуму замінимо задачею знаходження безумовного екстремуму, тобто скористаємося тим, що необхідні умови безумовного екстремуму функції $L(x, \Lambda)$ є також необхідними і для умовного екстремуму вихідної задачі [4]. Передбачається, що функції входять в (9) безперервні і диференційовані, причому $g_j(x)$, $W(x)$ є опуклими. Передбачається також, що умови Куна-Таккера для задачі нелінійного програмування виконуються. Абсолютний екстремум знайдеться з рішення системи рівнянь, отриманої з необхідних умов існування екстремуму функції Лагранжа $L(x, \Lambda)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= g_j = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \\ i &= 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

У позначеннях задачі (8) функція Лагранжа (9) і співвідношення необхідних умов оптимальності (10) будуть наступними

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = Ax_1x_2 + \lambda_1 \left(\frac{F^*}{B} x_1^{-2} (x_3x_4)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \lambda_2 \left(\frac{F^*}{C} (x_1^{-1}x_3^{-1}x_2^{-3} - 1) \right) + \lambda_3 \left(\frac{F^*}{D} ((x_1^{-1}x_2^{-1})x_3^{-\frac{2}{3}} - 1) \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = Ax_2 - \lambda_1 \left(\frac{F^*}{B} \frac{2x_1^{-3}}{x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}} \right) - \lambda_2 \left(\frac{F^*}{C} \frac{x_1^{-2}}{x_3x_2^3} \right) - \lambda_3 \left(\frac{F^*}{D} \frac{x_1^{-2}}{x_2x_3^{2/3}} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = Ax_1 - \lambda_2 \left(\frac{F^*}{C} \frac{3x_2^{-4}}{x_1x_3} \right) - \lambda_3 \left(\frac{F^*}{D} \frac{x_2^{-2}}{x_1x_3^{2/3}} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \lambda_1 \left(\frac{F^*}{B} \frac{1}{x_1^2} \frac{1}{2x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}} \left(\frac{1}{1-x_3} - \frac{1}{x_3\sqrt{1-x_3}} \right) \right) - \lambda_2 \left(\frac{F^*}{C} \frac{x_3^{-2}}{x_1x_2^3} \right) - \lambda_3 \left(\frac{F^*}{D} \frac{\frac{2}{3}x_3^{-\frac{1}{3}}}{x_1x_2} \right) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{F^*}{B} \frac{1}{x_1^2x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}} - 1 = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \frac{F^*}{C} \frac{1}{x_1x_3x_2^3} - 1 = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \frac{F^*}{D} \frac{1}{x_1x_2x_3^{2/3}} - 1 = 0. \quad (17)$$

4. Розв'язання системи нелінійних рівнянь

4.1. Отримання аналітичних співвідношень

У рівняннях (14) і (17) позначимо

$$u = \frac{F^*}{B}; \quad v = \frac{F^*}{C}; \quad w = \frac{F^*}{D}. \quad (18)$$

Тоді з урахуванням визначень g_j з (7) маємо:

$$u = x_1^2x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}, \quad (19)$$

$$v = x_1x_3x_2^3, \quad (20)$$

$$w = x_1x_2x_3^{2/3}. \quad (21)$$

З рівняння (21) виразимо x_2

$$x_2 = \frac{w}{x_1x_3^{2/3}}. \quad (22)$$

Возведемо вираз (22) в куб, отримаємо

$$x_2^3 = \frac{w^3}{x_1^3 x_3^2}. \quad (23)$$

Величину x_2^3 з виразу (23) підставимо в співвідношення (20), отримаємо

$$w^3 = x_1^2 x_3 v;$$

звідки випливає, що

$$x_1^2 = \frac{w^3}{x_3 v}. \quad (24)$$

Підставляючи вираз (24) в (19), отримаємо

$$u = \frac{w^3}{vx_3} x_3^{1/2} (1-x_3)^{1/2}. \quad (25)$$

Якщо піднести вираз (25) до квадрату, маємо

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{w^6}{v^2 x_3^2} x_3 (1-x_3), \quad u^2 v^2 x_3 = w^6 (1-x_3), \\ u^2 v^2 x_3 &= w^6 (1-x_3), \quad w^6 = u^2 v^2 x_3 + w^6 x_3, \\ w^6 &= (u^2 v^2 + w^6) x_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Зі співвідношення (26) випливає, що

$$x_3 = \frac{w^6}{(u^2 v^2 + w^6)}. \quad (27)$$

Вираз (27) підставимо в (24), в результаті отримаємо $x_1^2 = \frac{w^6 + u^2 v^2}{w^3 v}$, з якого випливає, що

$$x_1 = \sqrt{\frac{w^6 + u^2 v^2}{w^3 v}}. \quad (28)$$

Вирази (27) і (28) підставимо в визначення (22). В результаті чого маємо

$$x_2 = \frac{\sqrt[6]{(u^2 v^2 + w^6)} \sqrt{v/w}}{w}. \quad (29)$$

Підставляючи отримані значення x_j ; $j=1,2,3$ в систему трьох алгебраїчних рівнянь (12) - (14)

$$\begin{cases} Ax_2 - \lambda_1 U - \lambda_2 V - \lambda_3 W = 0 \\ Ax_1 - \lambda_2 T - \lambda_3 Z = 0 \\ \lambda_1 Q - \lambda_2 G - \lambda_3 R_0 = 0 \end{cases}$$

і виконуючи розв'язання її, отримаємо шукані вирази множників в означенні функції Лагранжа

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{A}{T} - (x_2^* - (V - GU))x_1^*\right) (ZG - TR_0)}{\left[(W + R_0U)T - Z(V - G)\right] T},$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{T} \left(1 - \frac{z(x_2^* - (V - GU))x_1^*}{\left[(W + R_0U)T - Z(V - G)\right]}\right),$$

$$\lambda_3 = \frac{A(x_2^* - (V - GU)x_1^* / T)T}{\left[(W + R_0U)T - Z(V - G)\right]}$$

або

$$\lambda_1 = \frac{A}{T} \left[Gx_1^* - \frac{S_1}{S_2} (Z \cdot G - T \cdot R_0) \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{T} \left[x_1^* - Z \cdot \frac{S_1}{S_2} \right],$$

$$\lambda_3 = A \cdot \frac{S_1}{S_2},$$

де уведено такі позначення:

$$S_1 = x_2^* - (V - GU)x_1^*, \quad S_2 = (Z + R_0U)T - Z(V - G), \quad T = \frac{F^*}{C} \frac{3}{x_2^4 x_1 x_3},$$

$$Q = \frac{F^*}{2B(x_1^*)^2 \sqrt{x_3^*} (1 - x_3^*)} \left(\frac{1}{1 - x_3^*} - \frac{1}{x_3^* \sqrt{1 - x_3^*}} \right),$$

$$V = g_2(x^*), \quad Z = g_3(x^*), \quad U = 2g_1(x^*), \quad G = g_2(x^*) + 1; \quad R_0 = \frac{2}{3}(g_3(x^*) + 1),$$

$$x^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}.$$

Отримані вирази (27), (28) і (29) запишемо в термінах позначень B , C , D , F^* , з (6). В результаті маємо оптимальні величини шуканих параметрів h, R, θ та обсягу матеріалу оболонки

$$h^{opt} = x_1^* = \sqrt{\frac{D^6 + (F^* BC)^2}{BD\sqrt{DC}}}, \quad R^{opt} = x_2^* = \sqrt[6]{\frac{D^6 + (F^* BC)^2}{\sqrt[3]{F^* BC}}} \sqrt{\frac{D}{C}},$$

$$\theta^{opt} = x_3^* = \frac{(F^* BC)^2}{D^6 + (F^* BC)^2}, \quad W^* = \frac{A^3 \sqrt[3]{[D^6 + (F^* BC)^2]^2}}{BDC \sqrt[3]{F^* BC}}. \quad (30)$$

4.2. Чисельна ілюстрація

При таких детермінованих значеннях вихідних даних: $E = 35 \text{ GPa}$; $L = 0,5 \text{ м}$; $\sigma_0 = 0,4 \text{ GPa}$; $F^* = 50 \text{ кН}$ виконано розрахунок за формулами (30). Отримано $x_1^* = 0,0954 \text{ см}$; $x_2^* = 2,5239 \text{ см}$; $x_3^* = 0,7508 \text{ см}$; $W^* = 75,658 \text{ см}^3$

З метою перевірки правильності отриманих результатів задача (8) була розв'язана чисельно на основі методу статистичних випробувань (метод Монте-Карло). При виконанні $N = 10^7$ випробувань було отримано $R^* = 2,515 \text{ см}$, $\theta^* = 0,757$, $h^* = 0,096 \text{ см}$, $W^* = 75,702 \text{ см}^3$. Такий розв'язок практично збігається з розв'язком, який отримано за формулами (30). Графік збіжності значень цільової функції W^* до свого граничного значення подано на рис. 1.

Рис. 1. Графік збіжності до граничної точки W^* (метод Монте-Карло)

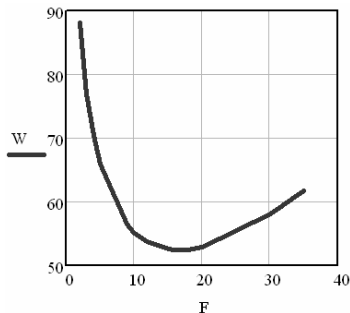


Рис. 2. Задача $F_{min}^* = \min W(F^*)$

Співвідношення (30) дозволяє проаналізувати: яка величина сили F_{min}^* забезпечить мінімальне значення функції мінімального обсягу. Залежність величини W від величини сили F^* , подано графічно на рис. 2.

У точці $F_{min}^* = 16,65 \text{ кН}$ функція W досягає свого мінімуму, що дорівнює $W = 52,381 \text{ см}^3$. При цьому параметри проекту будуть наступними $h = 0,055 \text{ см}$; $R = 3,031 \text{ см}$; $\theta = 0,25$.

5. Нечітке завдання навантаження

Розрахункові формули (30) дозволяють виконати аналіз впливу на оптимальний проект "грубого" завдання навантаження, вираженого у формі нечіткого опису, наприклад, "величина F_* близька до числа $50кН$ ", "величина F_* трохи більше, ніж...", "величина F_* береться з інтервалу..." і т.д. Адекватним описом такої невизначеності є нечіткі множини із заданою функцією належності $\mu(x)$, що має, наприклад, трикутний вид

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a} & \text{для } a \leq x \leq m, \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{для } m < x \leq b, \\ 0 & \text{для інших,} \end{cases} \quad (31)$$

де $a \leq m \leq b$; a, b, m - задані величини; a, b - границі інтервалу розкиду нечіткої величини; m - мода нечіткого числа.

Введення α -рівня дозволяє побудувати чітку множину значень нечіткої величини ξ - деякого параметра з умови задачі (наприклад, $\xi_1 = E$ - модуль пружності, $\xi_2 = F^*$ - величина сили). В цьому випадку з (31) для будь-якого $\alpha \in [0,1]$ випливає, що множина Q_α є чіткий інтервал (рис. 3)

$$Q_\alpha = \{x \mid x^L(\alpha) \leq x \leq x^R(\alpha)\}, \quad (32)$$

де $x^L(\alpha) = m\alpha + (1-\alpha)a$; $x^R(\alpha) = m\alpha + (1-\alpha)b$.

Суперпозиція всіх Q_α ; $\alpha \in [0,1]$ утворює нечітку множину

$$Q = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \alpha Q_\alpha. \quad (33)$$

Для кожного рівня α за формулами (30) обчислюються нечіткі величини товщини, радіуса, відносного вмісту армуючих волокон, обсягу оболонки та сили стиснення. На рис. 3-5 наведено графіки функцій належності для величин $h^*(\alpha)$ (рис. 4); $R^*(\alpha)$

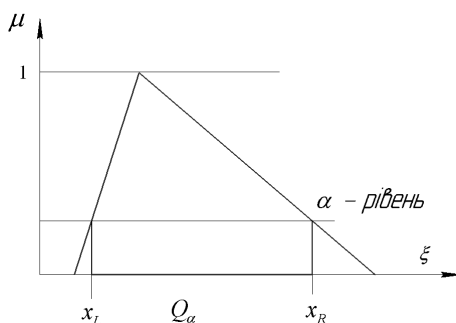


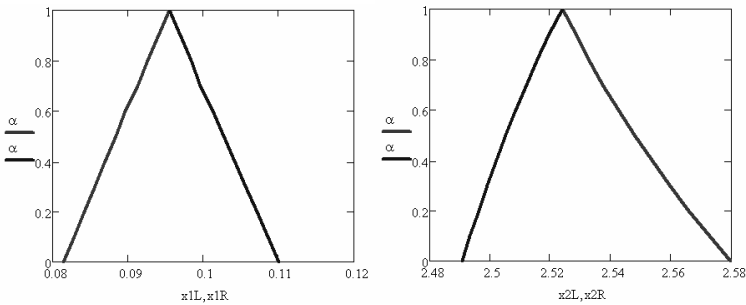
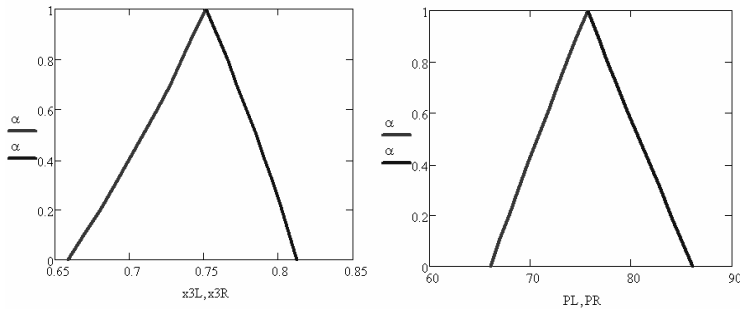
Рис. 3. Нечітке число ξ з функцією належності трикутного виду

(рис. 4); $\theta^*(\alpha)$ (рис. 5); W_α (рис. 6), і параметра $\xi = F^* \in Q_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ (рис. 5) за результатами експерименту 1, що надані в табл. 1.

Таблиця 1

Результати обчислень

α	h_L	h_R	R_L	R_R	θ_L	θ_R	W_L	W_R	F_L^*	F_R^*
0	0,0815	0,1101	2,5797	2,4908	0,6585	0,8127	66,0575	86,1207	4000	6000
0,1	0,0829	0,1086	2,5726	2,4935	0,6695	0,8075	66,9642	85,0465	4100	5900
0,2	0,0842	0,1071	2,5659	2,4962	0,6801	0,8022	67,8845	83,9777	4200	5800
0,3	0,0856	0,1056	2,5595	2,4992	0,6903	0,7966	68,8178	82,9147	4300	5700
0,4	0,0870	0,1041	2,5536	2,5022	0,7000	0,7908	69,7633	81,8576	4400	5600
0,5	0,0884	0,1027	2,5479	2,5054	0,7094	0,7848	70,7203	80,8068	4500	5500
0,6	0,0897	0,1012	2,5426	2,5087	0,7183	0,7785	71,6882	79,7625	4600	5400
0,7	0,0912	0,0997	2,5375	2,5123	0,7276	0,7720	72,6664	78,7252	4700	5300
0,8	0,0926	0,0983	2,5328	2,5159	0,7352	0,7652	73,6545	77,6951	4800	5200
0,9	0,0940	0,0969	2,5282	2,5198	0,7432	0,7582	74,6518	76,6725	4900	5100
1	0,0954	0,0954	2,5239	2,5239	0,7508	0,7508	75,658	75,658	5000	5000

Рис. 4. Функція належності нечітких величин h^* і R^* Рис. 5. Функція належності нечітких величин θ^* і F^*

Відповідно до визначень (32)-(33) і даними табл. 1 можна записати нечіткі множини (нечіткі числа) для h, R, θ, W . Наприклад, для W (графи 8-9) маємо:

$$W = \frac{0}{66.06} + \frac{0.1}{66.96} + \frac{0.2}{67.88} + \frac{0.3}{68.82} + \frac{0.4}{69.76} + \frac{0.5}{70.72} + \frac{0.6}{71.69} + \frac{0.7}{72.67} + \frac{0.8}{73.65} + \frac{0.9}{74.65} + \frac{1.0}{75.658} + \frac{0.9}{76.67} + \frac{0.8}{77.69} + \frac{0.7}{78.73} + \frac{0.6}{79.76} + \frac{0.5}{80.81} + \frac{0.4}{81.86} + \frac{0.3}{82.91} + \frac{0.2}{83.98} + \frac{0.1}{85.05} + \frac{0}{86.12}.$$

Перетворення нечіткого числа в чітке (етап дефаззифікації) виконано відповідно роботам [6,7]: очікуване значення нечіткої величини

$$\xi = \frac{\beta_1}{a_1} + \frac{\beta_2}{a_2} + \dots + \frac{\beta_m}{a_m}$$

є

$$\xi_{\text{det}} = \sum_{j=1}^m w_j a_j, \quad (34)$$

де вага w_i визначається за формулами:

$$w_i = w_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m); \quad m = 2M - 1;$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + A_0 - B_0), \quad \text{для } i = 1;$$

$$w_i = \frac{1}{2}(C_0 - D_0 + Q_0 - S_0), \quad \text{для } 2 \leq i \leq m - 1;$$

$$w_m = \frac{1}{2}(A_0 - P_0 + \beta_m), \quad (35)$$

де $A_0 = \max_{1 \leq j \leq m} \beta_j$, $B_0 = \max_{1 < j \leq m} \beta_j$, $C_0 = \max_{1 \leq j \leq i} \beta_j$, $D_0 = \max_{1 \leq j < i} \beta_j$, $S_0 = \max_{i < j \leq m} \beta_j$, $Q_0 = \max_{i \leq j \leq m} \beta_j$, $P_0 = \max_{i \leq j < m} \beta_j$, M – кількість β – рівнів; $0 \leq \beta_j \leq 1$; $1 \leq j \leq M$.

Відомі й інші прийоми дефаззифікації [1].

В результаті виконання цього етапу з величин W_α^* , $h^*(\alpha)$, $R^*(\alpha)$, $\theta^*(\alpha)$, $\alpha = \beta_j$ отримано, відповідно, детерміновані очікувані значення оптимальних обсягу, товщини, радіуса, відносного вмісту армуючих волокон (табл. 2), в семи експериментах, вихідні дані яких представлені в тій же табл. 2 (другий, третій стовпці). В цих стовпцях зазначено також % відхилення розкиду нечіткого числа від заданого його модального значення $m_F = 50 \text{ кН}$.

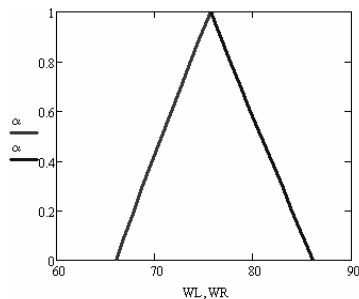


Рис. 6. Функція належності нечіткої величини W

Таблиця 2

Параметри нечіткого навантаження $F^*(a, m, b)$, очікуване значення
шуканих h_{det}^{def} , R_{det}^{def} , θ_{det}^{def} , W_{det}^{def} , F_{det}^{def} , η .

№ експ.	a, кН	b, кН	h_{det}^{def} , см	R_{det}^{def} , см	θ_{det}^{def}	W_{det}^{def} , см ³	%	F_{det}^{def} , кН	η
1	40(20%)	60(20%)	0,096	2,53	0,747	75,78	0,16	50,12	1,002
2	30(40%)	70(40%)	0,09	2,54	0,733	76,17	0,68	50,5	1,01
3	45(10%)	70(40%)	0,1	2,51	0,768	79,28	4,79	53,52	1,07
4	45(10%)	80(60%)	0,104	2,51	0,778	81,75	8,05	55,90	1,12
5	43(14%)	75(55%)	0,102	2,52	0,770	80,07	5,83	54,70	1,09
6	50(0%)	70(40%)	0,102	2,51	0,775	80,04	6,27	54,60	1,09
7	50(0%)	80(60%)	0,105	2,51	0,787	82,87	9,53	55,96	1,14
det	0	0	0,0954	2,524	0,751	75,658	0	50	1

Примітка. 1. В експериментах 1-5 реалізована така інформаційна ситуація: «навантаження, яке прикладене до оболонки, приблизно дорівнює 50 кН». 2. В експериментах 6-7 реалізована інформаційна ситуація: «навантаження, що прикладене до оболонки, трохи більше, ніж 50 кН».

За допомогою (30) для ряду експериментів з різним завданням нечіткого значення поздовжньої сили $F^*(a, m, b)$ отримано величини шуканих параметрів (табл. 2). У графі 8(%) наводиться відхилення дефазифікованого значення W_{def}^{det} від значення W_{det}^{det} , отриманого при використанні точного F^* . У графі F_{def}^{det} таблиці наводиться детерміноване значення прикладеної сили, що відповідає величині W_{def}^{det} . Якщо підставити W_{det}^{def} в ліву частину виразу для W^* (30) і розв'язати отримане рівняння

$$F^2 - 9F + \psi = 0 \quad \mathcal{G} = \frac{(W^{def})^3 BCD^3}{A}; \quad \psi = \left(\frac{D^3}{BC} \right)^2 \quad (31)$$

щодо невідомої F , то отримаємо F_{def}^{det} .

У графі 10 табл. 2 наводиться відношення сили F_{def}^{det} , отриманої у випадку проектування оболонки при наявності дефектів в завданні вихідних даних, до нормативної сили F^* (детерміноване значення). Це відношення є означення коефіцієнта надійності по навантаженню, тобто

$$\eta = \frac{F_{def}^{det}}{F^*}.$$

В нормах проектування для стержневих елементів цю величину призначають рівною 1,1 [8].

6. Висновки

1. Показано застосування класичного аналізу в детермінованій задачі нелінійної оптимізації стиснутої гладкої циліндричної оболонки з армованого склопластику мінімального обсягу при виконанні умов несучої здатності.

2. Для заданої сили стиснення отримано аналітичні вирази для шуканих параметрів проектування - товщини, радіуса, відносного вмісту армуючих волокон і обсягу (маси) оболонки.

3. Проведено аналіз зміни величини стискаючої сили на величину мінімального обсягу. Визначено точка величини сили стиснення, в якій досягається мінімум функції мінімального обсягу.

4. На основі теорії нечітких множин та отриманих аналітичних розв'язків проведено ряд числових експериментів, в результаті яких оцінені параметри оболонки як функції нечіткої величини сили (її розкиду). Як і очікувалося, наявність невизначеності в вихідному описі даних веде до збільшення витрати матеріалу.

5. Пропонується підхід до оцінки коефіцієнта надійності по навантаженню, що враховує несприятливе відхилення значення реального впливу з нечітким описом від нормативної величини. Використана модель «навантаження - несуча здатність» конструкції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы М.: Горячая линия - Телеком. - 2008. - 383 с.
2. Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов – Рига : Зинатне. – 1978.- 240 с.
3. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов Рига : Зинатне – 1974.- 312 с.
4. Рикардс Р.Б. Двойственная задача оптимизации ортотропной цилиндрической оболочки. – Механика полимеров.- 1973.- № 5 - с.805-871.
5. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование Единый подход М.: Сов.радио.- 1973.- 312 с.
6. Liu B. Uncertain Programming Wiley New York.-1999.-201 p.
7. Baoding Liu. Theory and Practice of Uncertain Programming Physica-Verlag Heidelberg; A Springer –Verlag Company.- 2002. - 416 p.
8. ДБН В.1.2-2:2006 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів «Навантаження і впливи» - К: Мін. буд. України, 2016. – 75 с.

REFERENCES

1. Rutkovskaya D., Pilinskiy M., Rutkovskiy L. Neyronnyie seti, geneticheskie algoritmy i nechyotkie sistemyi (Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems) M.: Goryachaya liniya- Telekom.- 2008.-383 s.
2. Teters G.A., Rikards R.B., Narusberg V.L. Optimizatsiya obolochek iz sloistyih kompozitov (Optimizing the shells of laminated composites) –Riga : Zinatne. – 1978.- 240 s.
3. Rikards R.B., Teters G.A. Ustoychivost obolochek iz kompozitnyih materialov (Stability of shells of composite materials) Riga : Zinatne – 1974.- 312 s.

4. *Rikards R.B.* Dvoystvennaya zadacha optimizatsii ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki (The dual problem of optimization of the orthotropic cylindrical shell) – *Mehanika polimerov.*- 1973.- № 5 - s.805-871.
5. *Zangvill U.I.* Nelineynoe programmirovaniye. Edinyiy podhod (Nonlinear programming. Unified approach) M.: Sov.radio.- 1973.- 312 s.
6. *Liu B.* Uncertain Programming Wiley New York.-1999.-201 p.
7. *Baoding Liu.* Theory and Practice of Uncertain Programming Physica-Verlag Heidelberg; A Springer –Verlag Company.- 2002. - 416 p.
8. DBN V.1.2-2:2006 Sistema zabezpechennya nadiynosti ta bezpeki budivelnih ob'ektiv (System for ensuring the reliability and safety of construction objects) «Navantazhennya i vplivi» K: Min. bud. Ukrainy, 2016. – 75 s.

Baranenko V.A., Volchok D.L.

INVERSE PROBLEM OF STRUCTURAL MECHANICS OF CYLINDRICAL SHELL REINFORCED WITH FIBERGLASS

There is formulation of the inverse problem of structural mechanics in the article. Optimal design of orthotropic cylindrical shell made of fiberglass, compressed with longitudinal forces is considered. The criterions of material-based restrictions are used. The restrictions are the strength, the local and overall buckling of the shell. The design variables are thickness, radius, and the relative content of reinforcing fibers. For the given compression force the analytical equations for the desired design parameters such as thickness, radius, relative content of reinforcing fibers and material volume (mass) of the shell are obtained. The convergence of the results using the Monte Carlo method was evaluated on the deterministic problem. An analysis of the influence of changes in the value of the compressive force on the value of the material minimum is made. The point of the value of the compressive force in which the minimum material volume function achieves its minimum is determined. On the basis of the theory of fuzzy sets and the obtained analytical solutions, a number of numerical experiments were carried out, in which the shell parameters were evaluated as a function of fuzzy value of force. As expected, the uncertainty in the original description of the data leads to an increase in the amount of the material. Implementation of tasks performed using the method of Lagrange multipliers and Monte Carlo method. According to the load the approach for coefficient of reliability estimation is proposed, taking into account the unfavorable deviation of the value and its real influence with the fuzzy description of the normative value. Model "load - bearing capacity" of the design is used. Investigation shows successful application of fuzzy sets and fuzzy modeling for described problem.

Keywords: inverse problem, cylindrical reinforced shell, fuzzy values, the optimal design of structures, uncertain programming , fuzzy modelling.

Бараненко В.А., Волчок Д.Л.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ АРМИРОВАННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА

Рассматривается постановка обратной задачи строительной механики - оптимального проектирования ортотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, сжатой продольными силами по критерию материалоемкости с учётом ограничений по прочности, местной и общей потере устойчивости. Переменными проектирования является толщина, радиус и относительное содержание армирующих волокон. Реализация задачи выполнена с помощью методов множителей Лагранжа и Монте-Карло. Приводятся результаты численных экспериментов. Рассмотрено влияние нечёткого описания нагрузки на оптимальный проект. Приводится оценка коэффициента надёжности по нагрузке для некоторых случаев информационных ситуаций относительно описания нечёткой величины продольной силы.

Ключевые слова: обратная задача, цилиндрическая армированная оболочка, нечёткие величины, оптимальное проектирование конструкций, неопределённое программирование, нечёткое моделирование.

УДК 539.3+511.1

Бараненко В.О., Волчок Д.Л. Обернена задача будівельної механіки армованої циліндричної оболонки зі склопластику // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 89-103.

Розглядається постановка оберненої задачі будівельної механіки - оптимального проектування ортотропної циліндричної оболонки зі склопластику, стисненої поздовжніми силами за критерієм матеріаломісткості з урахуванням обмежень по міцності, місцевій та загальній втраті стійкості.

Табл. 2. Іл. 6. Бібліогр. 8 назв.

Baranenko V.A., Volchok D.L. Inverse problem of structural mechanics of cylindrical shell reinforced with fiberglass // Strength of material and theory of structure. – 2017. – Issue 98. – P. 89-103. – Ukr.

There is formulation of the inverse problem of structural mechanics. Optimal design of orthotropic cylindrical shell made of fiberglass, compressed with longitudinal forces is considered.

Table 2. Fig. 6. Ref. 8

Бараненко В.А., Волчок Д.Л. Обратная задача строительной механики армированной цилиндрической оболочки из стеклопластика // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вип. 98. – С. 89-103.

Рассматривается постановка обратной задачи строительной механики - оптимального проектирования ортотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, сжатой продольными силами по критерию материалоемкости с учётом ограничений по прочности, местной и общей потере устойчивости.

Табл. 2. Ил. 6. Библиогр. 8 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор
БАРАНЕНКО Валерій Олексійович

Адреса робоча: 49600, м. Дніпропетровськ, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ
"Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, *БАРАНЕНКО Валерій Олексійович*

Адреса домашня: 49005 Україна, м. Дніпропетровськ, вул. Писаржевського 8а/70,
Бараненко Валерій Олексійович

Робочий тел.: +38(056)756342

Мобільний тел.: +38(066) 125-459-7

E-mail: baranenko1941@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент,
заступник декана факультету ПЦБ *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Адреса робоча: 49600, м. Дніпропетровськ, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ
"Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Адреса домашня: 49094 Україна, м. Дніпропетровськ, вул. Мандриківська 149/60, *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Робочий тел.: +38(056)7563422

Мобільний тел.: +38(066) 727-656-0

E-mail: Denys.L.Volchok@gmail.com

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТОВСТИХ НЕКАНОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, БЛИЗЬКИХ ДО СФЕРИЧНИХ, ПІД ДІЄЮ ПОВЕРХНЕВИХ СИЛ

В.М. Неміш¹

канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економіко-математичних методів

Д.Г. Чернописький²

канд. фіз.-мат. наук, науковий співробітник

¹*Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль*²*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ*

На основі загального розв'язку рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного середовища у сферичній системі координат у рамках другого варіанта методу збурення форми границі (МЗФГ) отримано з урахуванням перших трьох наближень розв'язки задачі про напружено-деформований стан (НДС) товстих оболонок обертання, обмежених поверхнями з малою амплітудою відхилення від сферичних. Згідно аналітичних розв'язків отримано числові дані, які дозволили провести аналіз напружено-деформованого стану оболонок під дією постійного або змінного осесиметричного (внутрішнього і зовнішнього) тиску. Залежно від геометричних параметрів рівнянь неканонічних поверхонь для різних форм оболонок показано їх вплив на перерозподіл напружень порівняно з випадком сферичної оболонки (канонічна форма – нульове наближення).

Ключові слова: товсті неканонічні оболонки, близькі до сферичних, постійний і змінний тиск.

Вступ

Замкнуті товсті оболонки як із сферичною так із близькою до неї неканонічною формою поверхонь мають широке застосування у вигляді резервуарів для зберігання зрідженого газу або нафтопродуктів. Інші елементи конструкцій у вигляді неканонічних оболонок з гофрованою формою поверхонь, рівняння яких у сферичній системі координат залежить від кута широти θ або довготи α , мають значний інтерес на предмет дослідження їх стійкості в умовах високого зовнішнього тиску. Зокрема, експериментальні дослідження у роботі [1] показали, що втрата стійкості гофрованої сферичної оболонки із поверхнею, рівняння якої залежить від координати α , мала місце тільки при величинах критичних навантажень у тричі більших ніж у випадку сферичної оболонки. Тому актуальними є дослідження величини концентрації напружень зумовленої різкою зміною кривизни неканонічної поверхні оболонки.

1. Постановка і методика розв'язання граничних задач про пружну рівновагу неканонічної оболонки обертання з неортогональними поверхнями

Розглядаються товстостінні пружні оболонки з внутрішньою S_0 і зовнішньою S_1 поверхнями, які задані рівняннями

$S_l \sim r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta)$ ($r_0 \equiv 1$; $r_l = \text{const} > 1$, $\varepsilon \ll 1$, $-1 \leq \omega_l \leq 1$; $l = \overline{0,1}$), (1)
де r, θ, α — безрозмірні сферичні координати (θ — кут широти, α — довготи, ε — амплітуда відхилення неортогональної поверхні від сферичної ($r_0 = 1$ або $r = r_l$)). Комбінація параметрів ω_l ($\omega_l = \pm 1; 0$) у рівняннях (1) дозволила поверхні S_0 і S_1 оболонки умовно прийняти еквівалентними (еквідистантними), якщо відповідні напрямні косинуси n_{t0} і n_{t1} нормалей \vec{n}_0 і \vec{n}_1 ($t = r, \theta$; $n_{\alpha 0} = n_{\alpha 1} \equiv 0$) рівні за величиною і протилежні за знаком, тобто

$$n_{t0} = \cos(\vec{e}_{n0}, \vec{e}_t) = \cos[(\vec{e}_{n0}, \vec{e}_t) + \pi] = -n_{t1}. \quad (2)$$

До еквідистантних належать поверхні S_0, S_1 , які задані рівняннями (1) при значенні $\omega_l = \pm 1$, взятому одночасно, що відповідає оболонкам постійної товщини. Згідно параметричного рівняння (1) отримуємо вісім варіантів форм оболонок, які приведено у табл. 1.

Таблиця 1

Варіанти оболонок	Рівняння внутрішньої поверхні $S_0 \sim \omega_0 = 0; \pm 1$	Рівняння зовнішньої поверхні $S_1 \sim \omega_1 = 0; \pm 1$
I	$r = 1$	$r = r_1 + \varepsilon f(\theta)$
II	$r = 1 + \varepsilon f(\theta)$	$r = r_1$
III	$r = 1$	$r = r_1 - \varepsilon f(\theta)$
IV	$r = 1 - \varepsilon f(\theta)$	$r = r_1$
V	$r = 1 + \varepsilon f(\theta)$	$r = r_1 + \varepsilon f(\theta)$
VI	$r = 1 - \varepsilon f(\theta)$	$r = r_1 - \varepsilon f(\theta)$
VII	$r = 1 + \varepsilon f(\theta)$	$r = r_1 - \varepsilon f(\theta)$
VIII	$r = 1 - \varepsilon f(\theta)$	$r = r_1 + \varepsilon f(\theta)$

При осевій симетрії форми поверхонь (1) оболонок і заданих на них відповідно осесиметричних зусиллях τ_{0t} і τ_{1t} , граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} n_{r0} + \sigma_{r\theta} n_{\theta 0})_{S_{0, I-VIII}} &= \tau_{r0}; \quad (\sigma_{r\theta} n_{r0} + \sigma_{\theta\theta} n_{\theta 0})_{S_{0, I-VIII}} = \tau_{\theta 0}; \\ (\sigma_{rr} n_{r1} + \sigma_{r\theta} n_{\theta 1})_{S_{1, I-VIII}} &= \tau_{r1}; \quad (\sigma_{r\theta} n_{r1} + \sigma_{\theta\theta} n_{\theta 1})_{S_{1, I-VIII}} = \tau_{\theta 1}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\tau_{il} = \bar{\tau}_i \cdot \bar{e}_l$ ($\bar{e}_r, \bar{e}_\theta$ — одиничні орти координатних осей). При цьому вектори зовнішніх зусиль $\bar{\tau}_l$ ($\tau_{rl}, \tau_{\theta l}$ — проекції вектора), заданих на граничних поверхнях, допускають представлення

$$\bar{\tau}_i = \pm |\tau_i| \bar{e}_{ni}, \quad (4)$$

де знак “+” відповідають розтягуючі зусилля, а “-” — стискаючі.

Напрявні косинуси $n_{rl}, n_{\theta l}$ одиничної нормалі \bar{e}_{nl} для внутрішньої ($\bar{e}_{n0} = n_{r0} \bar{e}_r + n_{\theta 0} \bar{e}_\theta$) і зовнішньої ($\bar{e}_{n1} = n_{r1} \bar{e}_r + n_{\theta 1} \bar{e}_\theta$) поверхонь згідно [2] визначаються формулами

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n_{r1} \\ n_{\theta 1} \end{pmatrix} &= \pm r \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}; \\ \begin{pmatrix} n_{\theta 1} \\ n_{r0} \end{pmatrix} &= \mp \frac{dr}{d\theta} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}; \quad n_{0\alpha} = n_{1\alpha} \equiv 0 \text{ при } r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Задовільнити крайовим умовам (3) безпосередньо неможливо, тому що в даній постановці задачі по крайній мірі одна із граничних поверхонь (1) є некоординатною, тому у випадку осевої симетрії розв’язки поставленої задачі для переміщень і напружень у довільному наближенні мають вигляд ($t = r, \theta; m = r, \theta, \alpha$)

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_t^{(n)} + O(\varepsilon^3), \quad \sigma_{mt} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{mt}^{(n)} + O(\varepsilon^3). \quad (6)$$

Припускаємо, що задані на границі зусилля і форма поверхонь оболонки S_0 і S_1 згідно рівнянь (1) є такими, що шукані переміщення і напруження (6) на граничних поверхнях допускають розкладання у ряди Тейлора в околі $r = 1, r = r_l$ ($r_l > 1; l = 0, 1$)

$$(u_t, \sigma_{mt})_{S_l} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{s=0}^n \frac{\omega_l^s f^s(\theta)}{s!} \left[\frac{\partial^s}{\partial r^s} (u_t^{(n-s)}, \sigma_{mt}^{(n-s)}) \right]_{r=r_l}. \quad (7)$$

Якщо згідно (1) надати змінній r у виразах (6) значення $r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta)$ і перейти до їх розкладу у ряди за степенями ε , то у довільному наближенні отримаємо згідно (7) формули для напрямних косинусів $n_{rl}, n_{\theta l}$ нормалі \bar{e}_{nl} для поверхні S_l

$$n_{r,l} = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \left[\gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right]; \quad n_{\theta l} = -\frac{\omega_l}{r_l} \frac{df(\theta)}{d\theta} \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \gamma_{v-1,l}, \quad \gamma_{-1,l} \equiv 0, \quad (8)$$

де

$$\gamma_{m,l} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k (-1)^k \frac{k!(2k-1)!}{(k-n)!n!(2k)!!} A_l^{k-n} B_l^{k-n} \quad k+n=m,$$

$$A_l = 2\omega_l \frac{f}{r_l}, \quad B_l = \frac{\omega_l^2}{r_l^2} \left[f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right].$$

Зауважимо, що згідно оцінок [2] область збіжності функціонального ряду визначається через значення величин A_l, B_l із (8) і залежить від геометричних параметрів рівнянь (1) щодо умов застосування МЗФГ для розрахунку НДС оболонок обертання з неканонічними поверхнями.

Якщо вектор зовнішніх зусиль у вигляді (4) спроекувати на координатні осі

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_l \cdot \bar{e}_r &= \pm |\tau_l| \bar{e}_{nl} \cdot \bar{e}_r = \pm |\tau_l| n_{rl} = \tau_{rl}, \\ \bar{\tau}_l \cdot \bar{e}_\theta &= \pm |\tau_l| \bar{e}_{nl} \cdot \bar{e}_\theta = \pm |\tau_l| n_{\theta l} = \tau_{\theta l}, \end{aligned} \quad (9)$$

то на основі виразів (8) його компоненти можна отримати у вигляді рядів за степенями ε

$$\begin{aligned} \tau_{rl} &= \pm |\tau_l| \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \left[\gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right], \\ \tau_{\theta l} &= \pm |\tau_l| \left[-\frac{\omega_l}{r_l} \frac{df(\theta)}{d\theta} \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \gamma_{v-1,l} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

Тоді на основі (3) і розкладів (8), (10) у довільному наближенні граничні умови отримаємо у вигляді ($j = r, \theta$)

$$\left\{ \sigma_{rj}^{(n)} + \sum_{s=1}^n \left[D_{1l}^{(s)} \sigma_{rj}^{(n-s)} + D_{2l}^{(s)} \sigma_{\theta j}^{(n-s)} \right] \right\} \Big|_{r=r_l} = \tau_{jl}^{(n)}, \quad (11)$$

$$n \geq 1, \quad l = 0 \sim r = 1; \quad l = 1 \sim r = r_l.$$

Тут $D_{1l}^{(s)}, D_{2l}^{(s)}$ – диференціальні оператори визначаються для кожної із граничних поверхонь (1) через функцію $f(\theta)$ і у довільному наближенні для осесиметричних задач мають вигляд

$$\begin{aligned} L_l^{(s)} &= \frac{\omega_l^s f^s}{s!} \frac{\partial}{\partial r^s}, \quad D_{1l}^{(s)} = \sum_{k=0}^s \left(\gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right) L_l^{(s-k)}, \\ D_{2l}^{(s)} &= -\frac{\omega_l}{r_l} \frac{\partial f}{\partial \theta} \sum_{k=1}^s \gamma_{k-1,l} L_l^{(s-k)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для розв'язку поставленої вище задачі обмежимося першими трьома наближеннями. Тоді згідно з [2] вирази для переміщень і напружень відповідно мають вигляд ($t = r, \theta; m = r, \theta, \alpha$)

$$u_l = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n u_l^{(n)} + O(\varepsilon^3), \quad \sigma_{ml} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \sigma_{ml}^{(n)} + O(\varepsilon^3) \quad (13)$$

і на граничних поверхнях неканонічних поверхнях S_0 і S_1

$$(u_l, \sigma_{ml})_{S_l} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \sum_{s=0}^n \frac{\omega_l^s f^s(\theta)}{s!} \left[\frac{\partial^s}{\partial r^s} (u_l^{(n-s)}, \sigma_{ml}^{(n-s)}) \right]_{r=r_l} + O(\varepsilon^3)$$

при $r = 1, r = r_1$ ($r_1 > 1; l = 0, 1$).

Згідно (9) у перших трьох наближень отримаємо розклади за степенями ε напрямних косинусів $n_{1r}, n_{1\theta}$ для нормалі \bar{e}_{1n} зовнішньої поверхні S_1

$$\begin{aligned} n_{r1} &= \cos(\bar{e}_{n1}, \bar{e}_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ n_{\theta 1} &= \cos(\bar{e}_{n1}, \bar{e}_\theta) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{\omega_1^2}{2r_1^2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2, \\ \beta_0 &= 0, \quad \beta_1 = -\frac{\omega_1}{r_1} \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad \beta_2 = \frac{\omega_1^2}{r_1^2} f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Вирази напрямних косинусів $n_{r0}, n_{\theta 0}$ одиничної нормалі \bar{e}_{0n} для внутрішньої поверхні S_0 отримаємо із (14) при значенні $r_1 = 1$, тобто

$$\begin{aligned} n_{r0} &= -\cos(\bar{e}_{n0}, \bar{e}_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ n_{\theta 0} &= -\cos(\bar{e}_{n0}, \bar{e}_\theta) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\omega_0^2}{2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2, \\ \beta_0 &= 0, \quad \beta_1 = \omega_0 \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad \beta_2 = -\omega_0^2 f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Згідно умов (10) вважаємо, що товстостінна ізотропна або трансверсально-ізотропна оболонки виду I—VIII знаходяться під дією внутрішнього $\bar{\tau}_0$ і зовнішнього $\bar{\tau}_1$ тиску

$$\bar{\tau}_0|_{S_0} = -\sigma_0 \bar{e}_{n0}; \quad \bar{\tau}_1|_{S_1} = -\sigma_1 \bar{e}_{n1}, \quad (16)$$

де σ_0, σ_1 - величини інтенсивності.

Тоді згідно (14)-(16) представимо розклад проєкцій зусиль на зовнішній поверхні в ряди по степенях ε у вигляді

$$\begin{aligned} F_{1r} &= F_{1r}^{(0)} + \varepsilon F_{1r}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{1r}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \\ F_{1\theta} &= F_{1\theta}^{(0)} + \varepsilon F_{1\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{1\theta}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} F_{1r}^{(0)} &= -\sigma_1, \quad F_{1r}^{(1)} = 0, \quad F_{1r}^{(2)} = \frac{\omega_1^2 \sigma_1}{2r_1^2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2; \\ F_{1\theta}^{(0)} &= 0, \quad F_{1\theta}^{(1)} = \frac{\omega_1}{r_1} \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad F_{1\theta}^{(2)} = -\frac{\omega_1^2 \sigma_1}{r_1^2} f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}, \end{aligned}$$

на внутрішній поверхні

$$\begin{aligned} F_{0r} &= F_{0r}^{(0)} + \varepsilon F_{0r}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{0r}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \\ F_{0\theta} &= F_{0\theta}^{(0)} + \varepsilon F_{0\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{0\theta}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} F_{0r}^{(0)} &= \sigma_0, \quad F_{0r}^{(1)} = 0, \quad F_{0r}^{(2)} = -\frac{\omega_0^2 \sigma_0}{2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2; \\ F_{0\theta}^{(0)} &= 0, \quad F_{0\theta}^{(1)} = -\omega_0 \sigma_0 \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad F_{0\theta}^{(2)} = \omega_0^2 \sigma_0 f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Таким чином, на основі співвідношень (11), (12), (14) і розкладів у ряди (15), (16) і (17), (18) у перших трьох наближеннях граничні умови на поверхнях оболонок різної форми (табл. 1; варіанти I–VIII) отримуємо для напружень на зовнішній поверхні у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=r_1} &= -\sigma_1; \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=r_1} = -[D_{11}^{(1)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1r}^{(1)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=r_1} &= -[D_{11}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1\theta}^{(1)}; \\ \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=r_1} &= -[(D_{11}^{(1)} \sigma_{rr}^{(1)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)}) + D_{11}^{(2)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{21}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1r}^{(2)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=r_1} &= -[(D_{11}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + D_{11}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{21}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1\theta}^{(2)}; \end{aligned} \quad (19)$$

на внутрішній поверхні

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=1} &= \sigma_0; \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} \Big|_{r=1} = 0; \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=1} = -[D_{10}^{(1)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0r}^{(1)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=1} &= -[D_{10}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0\theta}^{(1)}; \\ \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=1} &= -[(D_{10}^{(1)} \sigma_{rr}^{(1)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)}) + D_{10}^{(2)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{20}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0r}^{(2)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=1} &= -[(D_{10}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + D_{10}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{20}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0\theta}^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут $D_{1l}^{(s)}, D_{2l}^{(s)}$ ($s = 1, 2; l = 0, 1$) – диференціальні оператори, які у перших трьох наближеннях мають вигляд

$$D_{1l}^{(0)} = 1; D_{2l}^{(0)} \equiv 0 \quad (r_0 \equiv 1; r_1); \quad D_{1l}^{(1)} = \omega_l f(\theta) \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_{2l}^{(1)} = -\frac{\omega_l}{r_l} f'(\theta);$$

$$D_{2l}^{(2)} = \frac{\omega_l^2}{r_l} f(\theta) f'(\theta) \left(\frac{1}{r_l} - \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad f'(\theta) = \frac{df}{d\theta}. \quad (21)$$

Отже, параметрична форма представлення рівнянь поверхонь (1) і диференціальних операторів (21), коефіцієнтів розкладу зовнішніх зусиль у ряди за ε дозволило у перших трьох наближеннях отримати граничні умови та розробити загальний алгоритм розрахунку НДС ряду ізотропних і трансверсально ізотропних оболонок із складною геометричною формою поверхонь, що знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску.

За вихідне нульове наближення $\sigma_{mn}^{(0)}$ береться точний розв'язок відповідної граничної задачі для порожнинної сфери. Згідно умов (19), (20) розв'язок задачі у першому і другому наближенні зводиться до розв'язку послідовності просторових задач для порожнинної сфери. При цьому для побудови граничних умов у кожному із наступних наближень використовуємо розв'язки, які отримані у попередніх наближеннях. По аналогії з нульовим зберігається аналітична структура розв'язків у вищих наближеннях, які автоматично задовільняють рівнянням рівноваги. Це дозволяє ефективно застосувати МЗФГ при визначенні НДС товстих неканонічних оболонок у випадках коли відповідні просторові граничні задачі допускають у сферичних координатах точні аналітичні розв'язки у нульовому наближенні для ізотропного і трансверсально ізотропного матеріалу.

2. Загальні розв'язки рівнянь рівноваги у вищих наближеннях

Зазначемо, що основна перевага варіантів МЗФГ [2] у розв'язку задач пружності для тіл з неканонічними поверхнями над іншими наближеними аналітичними методами полягає у збереженні вигляду структури рівнянь рівноваги при переході побудови розв'язків від попередніх до наступних наближень.

Вважасмо, що матеріал пружного тіла має трансверсально ізотропні властивості відносно довільного радіуса-вектора, який проведений із загального центру сфер в дану точку (сферична ізотропія). Для осесиметричних задач у випадку трансверсально ізотропних тіл у формі оболонок з осьовою симетрією поверхонь відносно осі z під дією осесиметричних сил у довільному наближенні переміщення $u_r^{(j)}, u_\theta^{(j)}$ ($u_\alpha^{(j)} \equiv 0$). Згідно з [4] допускають через потенціальні функції $\Phi_n^{(j)}(r, \theta)$ представлення у вигляді

$$u_r^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{\partial \Phi_n^{(j)}}{\partial r}; \quad u_{\theta}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n^{(j)}}{\partial \theta}, \quad k_n = \text{const.} \quad (22)$$

Якщо скористатись зв'язком переміщення-деформації згідно узагальненого закону Гука для трансверсально-ізотропного тіла, то в сферичній системі координат вирази для компонент тензора напружень у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(j)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)} + \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} c_{13} \\ c_{11} + c_{12} \end{array} \right] \left(\Pi_1 + \frac{2k_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left[\begin{array}{l} c_{33} \\ 2c_{13} \end{array} \right] k_n \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi_n^{(j)},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} = (c_{11} - c_{12}) \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_2 \Phi_n^{(j)}; \quad \sigma_{r\theta}^{(j)} = c_{44} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_3 \Phi_n^{(j)}, \quad (23)$$

де диференціальні оператори Π_i ($i = 1, 2, 3$) визначаються виразами

$$\left(\begin{array}{l} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{array} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \pm \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \quad \Pi_3 = \frac{1}{r} \left[(1 + k_n) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right];$$

c_{lm} – пружні поєдні. При цьому потенціальні функції $\Phi_n^{(j)}(r, \theta)$ визначаються виразами

$$\Phi_n^{(j)}(r, \theta) = r^{v_{ni} + \frac{1}{2}} P_n(p), \quad p = \cos \theta, \quad (24)$$

а їх вигляд істотно залежить від значень v_{ni} коренів характеристичного рівняння

$$v_n^4 - 2a_n v_n^2 + b_n = 0, \quad (25)$$

яке слідує із однорідних рівнянь рівноваги. Коефіцієнти a_n, b_n рівняння (25) залежать від пружних постійних c_{lm} трансверсально ізотропного матеріалу, індекса n полінома Лежандра $P_n(p)$. Відповідно до значення виразу виразу $(a_n^2 - b_n)^{1/2}$ корені рівняння v_{ni} ($i = 1, 2, 3, 4$) можуть бути дійсними (різні, кратні) або комплексними для яких справедливі вирази

$$\left(\begin{array}{l} v_{n1} \\ v_{n2} \end{array} \right) = \pm [a_n + (a_n^2 - b_n)^{1/2}]^{1/2}; \quad \left(\begin{array}{l} v_{n3} \\ v_{n4} \end{array} \right) = \pm [a_n - (a_n^2 - b_n)^{1/2}]^{1/2}.$$

Постійна величина k_{ni} у виразах (23) приймає значення

$$k_{ni} = \frac{c_{11} n(n+1) - c_{44} (v_{ni}^2 - \frac{1}{4}) + c^+}{(v_{ni} + \frac{1}{2}) \left[(c_{13} + c_{44}) (v_{ni} - \frac{1}{2}) + c^+ \right]}.$$

У роботі [3] для кожного із окремих значень коренів приведено детальний аналіз побудови загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції типу (24) у випадку неосесиметричних задач.

Загальним у побудові МЗФГ наближених розв'язків задач для неканонічних областей, близьких до сферичних, із застосуванням диференціальних операторів (12) або (21) є ріст індекса n поліномів Лежандра у кожному із наступних наближень.

При числових розрахунках НДС неканонічних тіл безпосередньо отримуємо широкий діапазон зміни величин елементів (коефіцієнтів) матриць при невідомих алгебраїчних систем, отриманими із граничних умов (19), (20) на згідно виразів для переміщень (22) і напружень (23). Зокрема, одна група величин елементів типу $r^{v_{ni}+1/2}$ при $v_{ni} > 0$ прямує до ∞ при $n \rightarrow \infty$, а інша для $v_{ni} < 0$ при $n \rightarrow \infty$ до 0. Такий діапазон зміни величин елементів матриць складає проблему числового розв'язку алгебраїчних систем рівнянь з погано обумовленими матрицями. Тому для розрахунків НДС неканонічних товстих оболонок доцільно шукати загальні розв'язки через $\Phi_n^{(j)}(\theta, r)$ у кожному із наближень, наприклад, у випадку дійсних і різних коренів у вигляді

$$\Phi_n^{(j)}(\theta, r) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{n1}^{(j)} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{v_{n1}^{(j)}+1/2} + B_{n2}^{(j)} r^{v_{n2}^{(j)}+1/2} + \\ + \tilde{A}_{n3}^{(j)} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{v_{n3}^{(j)}+1/2} + B_{n4}^{(j)} r^{v_{n4}^{(j)}+1/2} \end{bmatrix} P_n(\cos \theta), \quad (26)$$

де $\tilde{A}_{ni}^{(j)} = A_{ni}^{(j)} r_1^{v_{ni}^{(j)}+1/2}$ ($i = 1, 3$); $B_{ni}^{(j)}$ ($i = 2, 4$) – довільні постійні, які визначаються із граничних умов; r_1 – зовнішній радіус порожнинної сфери.

Для побудови аналітичних розв'язків запропоновано представлення потенціальних функцій у вигляді (26). Такий підхід дозволив у довільному наближенні згідно граничних умов типу (19), (20) для визначення невідомих $\tilde{A}_{ns}^{(j)}, B_{ns}^{(j)}$ ($s = 1, 2$) отримати алгебраїчні системи рівнянь з обмеженими по величині елементами матриць $|a_{ij}| \leq 1$ на відміну від випадку використання членів розв'язку у вигляді $A_{ns}^{(j)} r^{v_{ns}+1/2}$ для яких число v_{ns} із збільшенням номера наближень істотно зростає.

Користуючись рекурентними співвідношеннями для поліномів Лежандра, згідно з формулами (22), (23) у випадку осесиметричних однорідних рівнянь рівноваги в j -му наближенні отримуємо вирази для переміщень

$$u_{r,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} (r)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} \right] P_n(p),$$

$$u_{\theta,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} k_{ni} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} k_{ni} (r)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} \right] \frac{dP_n(p)}{dp}. \quad (27)$$

і напружень

$$\sigma_{rr,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} \gamma_{ni} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} \gamma_{ni} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} \right] P_n(p),$$

$$\sigma_{r\theta,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} \delta_{ni} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} \delta_{ni} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} \right] \frac{dP_n(p)}{dp},$$

$$\sigma_{\theta\theta,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [\eta_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [\eta_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] \right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [q_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [q_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] \right\}, \quad (28)$$

де

$$\begin{pmatrix} \eta_{ni} \\ q_{ni} \end{pmatrix} = k_{ni} [c_{11} + c_{12} + (\nu_{ni} - \frac{1}{2})] - n(n+1) \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \quad P_n'(p) = \frac{P_n(p)}{dp},$$

$$\gamma_{ni} = k_{ni} [2c_{13} + c_{33}(\nu_{ni} - \frac{1}{2})] - n(n+1)c_{13}, \quad \delta_{ni} = c_{44}(k_{ni} + \nu_{ni} - \frac{3}{2}).$$

Якщо у виразах (27), (28) невідомі постійні $B_{ni}^{(j)}$ ($i = 2, 4$) покласти рівними нулю, то отримуємо розв'язки задачі про концентрацію напружень у середовищі з неканонічним включенням, а у випадку $\tilde{A}_{ni}^{(j)} = 0$ ($i = 1, 3$) – з порожниною.

З урахуванням перших трьох наближень компоненти вектора переміщень і тензора напружень у внутрішніх точках неканонічних оболонок з точністю до $O(\varepsilon^3)$ визначаються на основі формул (12), а на граничних поверхнях і поверхнях рівня $r = r_* + \omega_j \varepsilon f(\theta)$ при $1 \leq r_* \leq r_1$ – згідно з (13).

На площадках неканонічних граничних поверхонь з нормалю n і дотичними в точці її основи векторами τ та s переміщення визначаються за формулами

$$\begin{aligned} u_n &= u_r n_r + u_\theta n_\theta; \quad u_s = -u_r n_\theta + n_r u_\theta; \\ \sigma_{nn} &= \sigma_{rr} n_r^2 + \sigma_{\theta\theta} n_\theta^2 + 2\sigma_{r\theta} n_r n_\theta; \\ \sigma_{ss} &= \sigma_{\theta\theta} n_r^2 + \sigma_{rr} n_\theta^2 - 2\sigma_{r\theta} n_r n_\theta; \\ \sigma_{ns} &= (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) n_r n_\theta + \sigma_{r\theta} (n_r^2 - n_\theta^2), \end{aligned} \quad (29)$$

де на неканонічних поверхнях складові для переміщень і напружень у правих частинах (29) визначаються за формулами (13).

3. Числові розрахунки НДС неканонічних товстостінних оболонок під дією внутрішнього і зовнішнього тиску

Для ізотропних і трансверсально ізотропних оболонок різної конфігурації з граничними поверхнями, близькими до сферичних, що описуються рівняннями у параметричному вигляді (табл.1; варіанти I—VIII), виконано ряд числових розрахунків НДС під дією постійного і змінного внутрішнього або зовнішнього тиску, що змінюється за законом

$$\begin{aligned} \sigma_0|_{S_0} &= (\sigma_{10} + \sigma_{20} \cos 2\theta), \\ \sigma_1|_{S_1} &= -(\sigma_{11} + \sigma_{21} \cos 2\theta), \\ \sigma_{i0}, \sigma_{i1} &= \text{const}, \quad i = 0, 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Розрахунки отримано для ізотропних оболонок при $\varepsilon = 0, 1$; $\nu = 0, 25$ (ν — коефіцієнт Пуассона). Зазначимо, для ізотропного матеріалу корені характеристичного рівняння (25) визначаються за формулами

$$\begin{pmatrix} v_{n1}^{(n)} \\ v_{n2}^{(n)} \end{pmatrix} = \pm \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad \begin{pmatrix} v_{n3}^{(n)} \\ v_{n4}^{(n)} \end{pmatrix} = \pm \left(n - \frac{1}{2} \right). \quad (31)$$

На рис. 2, 3 показано розподіл меридіональних $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_{10}$ і кільцевих напружень $\sigma_{\alpha\alpha} / \sigma_{10}$ залежно від кута θ на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки виду IV (рис. 1, $\omega_0 = -1$; $\omega_1 = 0$) під дією постійного внутрішнього тиску. При цьому штрихові лінії відповідають розподілу напружень у порожнинній сфері ($\varepsilon = 0$). Змінна товщина оболонки на рис. 1, збільшення товщини $\delta|_{\theta=0} = r_1 - 1 + \varepsilon$ в полюсі та значне зменшення $\delta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = r_1 - 1 - \varepsilon$ на

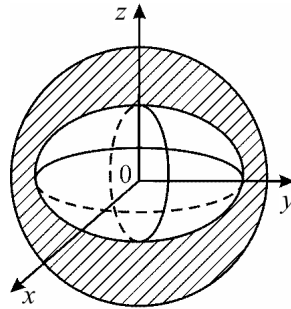


Рис. 1

екваторі (за рахунок зміни неканонічної форми внутрішньої поверхні) ілюструє (суцільні лінії) значний істотний перерозподіл величини напружень порівняно із сферичною оболонкою (канонічна форма – штрихові лінії). При заданих вище геометричних розмірах, товщина оболонки на екваторі у два рази менша за товщину в полюсі.

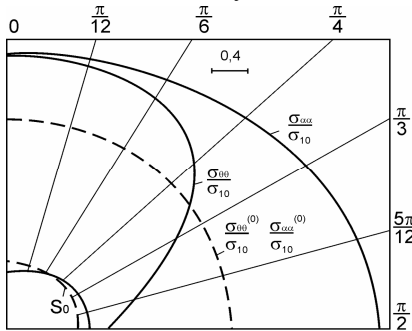


Рис. 2

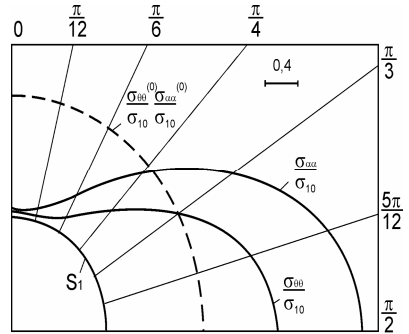


Рис. 3

На екваторі зі сторони внутрішньої поверхні неканонічної поверхні напруження меридіональні для неканонічної оболонки рівні значенням $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10}=0,248$ і $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10}=1,753$ та відповідно для кільцевих $\sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10}=3,359$ і $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10}=1,753$ (збільшення величини напруження у 1,9 рази). На зовнішній поверхні напруженням відповідають значення $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10}=2,163$ і $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10}=1,253$ (збільшення у 1,7 рази) та $\sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10}=3,241$ і $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10}=1,253$ (збільшення у 2,59 рази).

На полюсі зі сторони внутрішньої поверхні неканонічної поверхні меридіональні і кільцеві напруження для неканонічної оболонки рівні значенням $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10} = 1,753$; $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10} = 2,654$ (збільшення у 1,46 рази) та відповідно на зовнішній поверхні $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10} = 1,253$; $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10} = 0,011$ (істотне зменшення величини напружень). Приведені дані для неканонічної оболонки з складною формою граничних поверхонь ілюструють значний вплив зміни товщини на перерозподіл величини напружень порівняно із сферичною формою оболонки.

У табл. 2 наведені числові результати зміни величини максимальних кільцевих напружень в оболонці (рис. 1), які характеризують швидку збіжність ітераційного процесу при збільшенні параметра товщини r_1 .

Таблиця 2

r_1	Наближення ($\theta = \pi/2$; S_0 , IV)						$\frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{\sigma_{10}}$
	нульове	$\Delta_{\alpha}^{(0)}$, %	перше	$\Delta_{\alpha}^{(1)}$, %	друге	$\Delta_{\alpha}^{(2)}$, %	
1,3	1,753	52,2	1,191	35,5	0,415	12,3	3,359
1,4	1,360	62,7	0,644	29,7	0,166	7,6	2,170
1,6	0,984	77,2	0,250	19,6	0,040	3,2	1,274
1,8	0,810	86,5	0,114	12,2	0,012	1,3	0,936
2,0	0,714	92,7	0,053	6,9	0,003	0,4	0,770

На рис. 4 для трансверсально ізотропної оболонки складної форми з постійною товщиною показано розподіл меридіональних і кільцевих напружень на внутрішній поверхні S_0 під дією зовнішнього нерівномірного тиску, що змінюється згідно із законом (30) в якому прийнято $\sigma_{11}|_{S_1} = -\tau_{11}(1 + \cos 2\theta)$. При цьому поверхні оболонки (варіант V) задані рівнянням

$$S_i \sim r = r_i + \varepsilon \omega_i \cos k\theta,$$

де $\omega_0 = \omega_1 = 1$; $k = 6$. Пружні і геометричні характеристики оболонки для розрахунків приймалися наступними: ($c_{ij} \cdot 10^{10}$ Па): $c_{11} = 5,97$; $c_{12} = 2,62$; $c_{13} = 2,17$; $c_{33} = 6,17$; $c_{44} = 1,64$; $r_0 \equiv 1$, $r_1 = 1,4$; $\varepsilon = 0,1$.

Закон зміни зовнішнього тиску відповідає максимальному навантаженню оболонки в полюсах ($\theta=0$) і нульовому на лінії екватора ($\theta=\pi/2$). В силу осевої симетрії для фрагмента оболонки (рис. 4) у точках внутрішньої поверхні з додатною (опуклість гофра) та від'ємною (вогнутість) кривизнами має місце концентрація напружень, величина яких (суцільна лінія) в порядок вища значень напружень в порожнинній

сфері (штрихова). Зміна напружень на поверхнях неканонічної оболонки має істотну нелінійну осцильовану форму порівняно із сферичною.

Висновок. У даній статті на основі методу збурення форми границі (другий варіант) і параметричного представлення рівнянь неканонічних поверхонь товстих оболонок, близьких до сферичних, приведено вирази

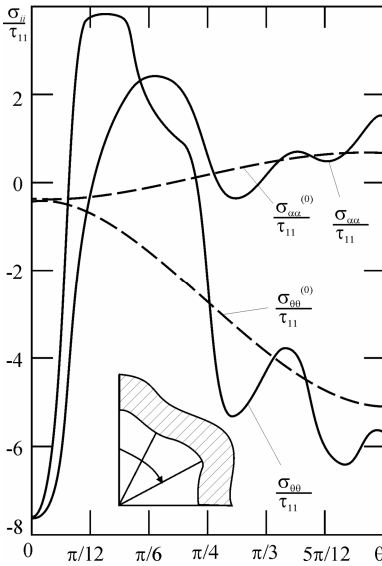


Рис. 4

диференціальних операторів для побудови у довільному наближенні граничних умов. З врахуванням перших трьох наближень розроблено загальний алгоритм розрахунку НДС ряду ізотропних і трансверсально ізотропних оболонок із складною геометричною формою поверхонь, що знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску. Встановлено істотний вплив неканонічної форми оболонки на перерозподіл напружень порівняно з сферичною.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бранков Г.И. Некоторые особенности при исследовании волнообразных оболочек.– В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. - С. 79–88.
2. Гузь А.Н., Немши Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Вища шк., 1989. – 352 с.
3. Немши Ю.Н., Немши В.Н. К решению пространственных задач теории упругости трансверсально изотропной среды для неканонических областей.– Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 76–82.
4. Чен В.Т. О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией.–Труды амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика. – 1966. – 33, № 3. – С. 71–79.

REFERENCES

1. Brankov H.I., Nekotori osobennosti pri issledovanii volnoobrasni obolochek (Some special features of the investigation of undulating shells, in: Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis [in Russian]) // Nauka, Moscow, 1972. - p. 79–88.
2. Guz' A.N. and Yu. N. Nemish. Metod vosmuzhenia formy hranica v mekhanike sploshnoi sredy (Boundary-Shape Perturbation Method in Continuum Mechanics [in Russian]) // Vyshcha Shkola, Kiev, 1989. – 352 p.
3. Nemish Ju.N., Nemish V.N. K resheniju prostranstvennix zadach teorii pruzhnosti transversalno-isotropnoy sredy dla nekanonshni oblasti (Contribution on the Solution of the Elasticity Theory of a Transversally Esotropic Medium for Noncanonical Regions). // Prikladna mekhanika. – 1976. – 12, N 12, p.76-82.
4. Chen V.T. O nekotorig zadachax dla upruhix materialov c sfericheskoi isotropiej (Certain problems for elastic materials with spherical isotropy) // Trans. ASME, Prikl. Mekh., 33, No 3, p. 71–79.

Nemish B.N., Chernopiskii D.I

STRESS STATE OF THICK-WALLED SPHERICAL-LIKE NONCANONICAL SHELLS OF REVOLUTION UNDER SURFACE FORCES

The problem on the stress-strain state (SSS) of thick-walled shells of revolution bounded by surfaces with the small amplitude of departure from spherical ones is solved with allowance for the first three approximations. With this in mind the general solution of equilibrium equations for a transversal-isotropic medium in a spherical coordinate system within the framework of the second variant of the boundary perturbation method (BPM) has been used. Based on the analytical solutions and numerical data obtained, the stress-strain state of the shells subject to constant or variable axisymmetric (internal and external) pressure is analyzed. The influence of the geometric parameters of equations for noncanonical surfaces with various shell shapes on the redistribution of stresses in comparison with a spherical shell (canonical shell and zero approximation) is demonstrated. Parametric representation of the equations of noncanonical surfaces and, respectively, differential operators in approximations made it possible to calculate within the framework of a single algorithm the stress-strain state of a number of shells with various configurations. The stress concentration numerical data at characteristic points (minimum thickness under maximum loading) of the shell are obtained. It is shown how variation in the curvature of the shell surface affects the magnitude and nonlinear character of stress distributions, which are consistent

with asymptotical properties of solutions under the oscillating law of variations in boundary conditions. Particularly, the shells with oscillated surfaces are associated with equilibrium equations (as the systems of partial differential equations) with Lamé's coefficients dependent on rapidly varying functions that appear in equations of boundary surfaces. The asymptotic solution properties of such systems of differential equations have been studied by M.I. Vyshik and L.A. Lyusternak.

Key words: thick-walled spherical-like noncanonical shells, constant and variable pressure.

Немиш В.Н., Чернопиский Д.И.

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТЫХ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ К СФЕРИЧЕСКИМ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ**

В статье на основании метода возмущения формы границы (второй вариант) и параметрического представления уравнений неканонических поверхностей толстых оболочек, близких к сферическим, приведено выражения дифференциальных операторов для построения у произвольном приближении граничных условий. С учетом первых трех приближений разработан общий алгоритм расчета НДС ряда изотропных и трансверсально изотропных оболочек из сложной геометрической формой поверхностей, которые находятся под внутренним или внешним давлением. Установлено существенное влияние неканонической формы оболочки на перераспределение напряжений по сравнению со сферической.

Ключевые слова: толстые неканонические оболочки, близкие к сферическим, постоянное и переменное давление.

УДК 539.3

Немиш В.М., Чернопиский Д.Г. **Напружений стан товстих неканонічних оболонок, близьких до сферичних, під дією поверхневих сил** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 104-118.

Методом збурення форми границі з врахуванням перших трьох наближень отримано аналітичні розв'язки задачі для дослідження напружено-деформованого стану товстих неканонічних оболонок під дією внутрішнього і зовнішнього тиску.

Табл. 2. Іл. 4. Бібліогр. 4 назв.

Nemish V.N., Chernopiskii D.I. **Stress state of thick-walled spherical like noncanonical shells of revolution under surface forces** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – С. 104-118.

The method of perturbing the shape of the boundary, taking into account the first three approximations, provides analytic solutions to the problem for studying the stress-deformed state of thick non-canonical shells under the influence of internal and external pressure.

Немиш В.Н., Чернопиский Д.И. **Напряженное состояние толстых неканонических оболочек вращения, близких к сферическим, под действием поверхностных сил** // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 98. – С. 104-118.

Методом возмущения формы границы с учетом первых трех приближений получены аналитические решения задачи для исследования напряженно-деформированного состояния толстых неканонических оболочек под действием внутреннего и внешнего давления.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів Тернопільського національного економічного університету НЕМІШ Васи́ля Миколайович
E-mail: nemish_vm@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник Івано-Франківського національно-технічного університету нафти і газу ЧОРНОПІСЬКИЙ Дмитро Гнатович

Робочий тел.: +380 (44) 234-31-33.

E-mail: info@ndumka.kiev.ua

UDC 539.3

RESEARCH INFRASTRUCTURES IN CONTEMPORARY EUROPEAN SCIENCE

O.S. Pogorelova¹

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

T.G. Postnikova¹

Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

O.V. Gerashchenko¹

Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

¹Kyiv National University of Construction and Architecture

This article is short review and summary, sometimes compilation, of the works explaining the contemporary conception Research Infrastructures (RI). The short information about Academic and Research Networks URAN and GEANT is given. The impacts of RIs on economics, on innovation, on scientific activity, and on society are described.

Keywords: research infrastructure, science, knowledge, education, cooperation, scientific community, Academic and Research Networks.

1. Introduction

There is known Programme of European Research Council (ERC) HORIZON2020. This Programme proposes and funds many different Topics and Projects at different domains of science. There are some big sections: Excellent Science, Industrial Leadership, and Societal Challenges. There are Topics about information and communication technologies; space; nanotechnologies; advanced materials; biotechnology; health; demographic change; food security; secure, clean and efficient energy; smart, green and integrated transport; climate action; environment; resource efficiency and raw materials; and so on at this Programme [1].

But there is no one concrete Topic in mathematics, mechanics or engineering. Although there are many scientific international journals, monographs, conferences, and symposiums on nonlinear dynamics, fracture mechanics, and other sections of Structure mechanics. For example, an International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems, Journal of Applied Nonlinear Dynamics, Journal Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity; International Conference on Nonlinear Dynamics Complexity, XVIII International Symposium “Dynamics of Vibroimpact (strong nonlinear) Systems”, the third International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis, and so on [2]. The International Conference on Fracture, the 15th and 16th International Conference on Fracture and Damage Mechanics.

All Topics proposed by ERC concern International scientific cooperation and collaboration. Such cooperation and collaboration has to be oriented at building, filling, and development of Research Infrastructures. There is very typical Topic: “Policy and international cooperation measures for research infrastructures”. This call focuses on reinforcing European research infrastructures policy and international cooperation. It is underlined that the investigations do not fund. Only creating and development of research infrastructures will be funded. The Europe 2020 strategy implemented by the European Commission gives a major role to infrastructures in the creation of the European research space.

The goal of this paper is to introduce the readers with conception Research Infrastructures and their role in contemporary European science. We used the materials of European Commission and some articles for this purpose achievement.

2. Research Infrastructures definition

ERC considers that “Research Infrastructures (RIs) play an increasingly important role in the advancement of knowledge and technology. They are a key instrument in bringing together a wide diversity of stakeholders to look for solutions to many of the problems society is facing today. RIs offer unique research services to users from different countries, attract young people to science, and help to shape scientific communities. RIs help to create a new research environment in which all researchers - whether working in the context of their home institutions or in national or multinational scientific initiatives - have shared access to unique or distributed scientific facilities (including data, instruments, computing and communications), regardless of their type and location in the world. RIs are therefore at the centre of the knowledge triangle of research, education and innovation, producing knowledge through research, diffusing it through education, and applying it through innovation” [3].

The European Commission Expert Group on Research Infrastructures writes at its report:” Reasearch infrastructures (RIs) lie at the heart of the knowledge triangle – the beneficial combination of research activity, specialized education/training and innovation that advances our knowledge and understanding across all scientific domains. European infrastructures are the large-scale or singular facilities, scientific instruments, distributed facilities and interconnected networks, funded by Member States and supported by Community budget of the European Union and shared widely within and between scientific research communities” [4].

Research Infrastructures are facilities which support the work of researchers, serving scientists by gathering the observation data they need, treating this data and preserving it for future use (of a multidisciplinary nature whenever possible) [5].

Research Infrastructures have to ability to create rich research environments and attract and retain researchers and experienced engineers/technologists from different countries, regions and disciplines.

What are Research Infrastructures? European Commission gives such definition: “Research infrastructures (RI) refer to facilities, resources (including human) and related services needed by the research community to conduct research in any scientific or technological field. Research infrastructures include:

- Major equipment or group(s) of instruments used for research purposes;
- Permanently attached instruments, managed by the facility operator for the benefit of researchers, industrial partners and society in general;
- Knowledge-based resources such as collections, archives, structured information or systems related to data management, used in scientific research;
- Enabling information and communication technology-based (ICT) or “einfrastructures” such as grid, computing, and software communications;
- Any other entity of a unique nature that is used for scientific research” [6].

There are different types of research infrastructures with specific characteristics.

RIs may be “single-sited” (a single resource at a single location), “distributed” (a network of distributed resources), or “virtual” (the service is provided electronically).

These key infrastructures have not only been responsible for some of the greatest scientific discoveries and technological developments, but are also influential in attracting the best researchers from around the world and in building bridges between national and research communities and scientific disciplines.

Naturally the construction, development, and operation of RIs require the investments. In [6] there is very nice Figure showing the operation of RIs.

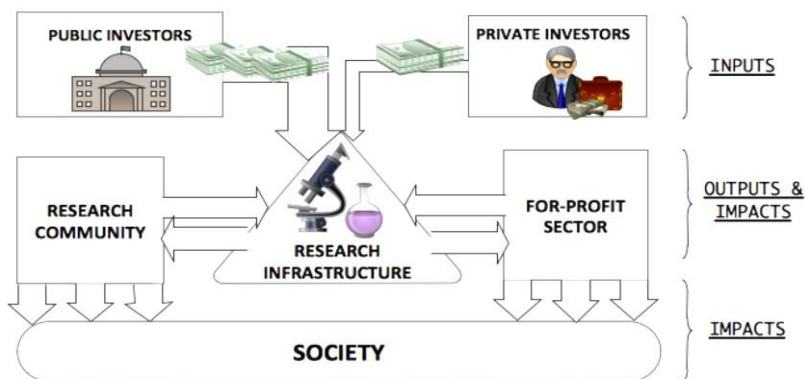


Fig. 1. Stakeholders and beneficiaries of investment in research infrastructure

3. Short information about Research and Academic Networks URAN and GEANT

The development of scientific exchange programs, leads to the need to recognize amongst the research infrastructures based on very high-level human networks, for ensuring hosting and managing events of international impact.

Except well known social networks there are Research and Academic Networks [7].

Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA) is URAN Association Member. URAN – Ukrainian Research and Academic Network – was created under decision of Ministry of Education of Ukraine and National Academy of Science of Ukraine with support of universities, institutes of Ministry of Education of Ukraine and National Academy of Science of Ukraine in accordance with Joint resolution of Presidium of NAS of Ukraine and Board of Ministry of Education of Ukraine of June 20, 1997.

The purpose of establishing of URAN Association and the principal goal of activity of the Association is coordination and integration of efforts of the Association Members to ensure creation, development and usage of sole Ukrainian National Research and Education Network, increasing of education and science level in Ukraine, implementation of principles of information-oriented society, competitive joining of Ukraine to the Global information-oriented area and representing of interests of the Association members in institutions of government authority as well as in Ukrainian and International organizations.

URAN is Internet Provider for KNUCA, it provides the set of services for own users. For example, Video conferencing service, free WiFi Internet service in university campuses, Project “Scientific Periodicals of Ukraine”, Ukrainian Scientific Citation Index (UInCit), Project “Scientific Conferences of Ukraine”, Science of Ukraine in the mirror of SciVerse Scopus scientometric database, Services to Scientific Research and Educational Institutions [8,9].

URAN provides the exit into GEANT – pan-European Network for Research and Education. The GÉANT high-speed network is just one of many examples of e-Infrastructure initiatives launched to facilitate cooperation among researchers. E-infrastructures enable scientists to share knowledge and resources and bring real benefits for ordinary people.

On March 2009, GEANT have certified Ukrainian scientific-educational network URAN in the presence of Ukrainian users. These processes are at the stage of concluding URAN connection to GEANT. Certification of company executives held Dante (the managing company of GEANT) John Sievers and representative of the Trans-European Association of Research and Education Network Valentina Cavali.

GÉANT means community collaboration and is built on networks, services, people and innovation.

It brings together more than 30 million researchers from 34 European countries and has channels in different regions of the world. GEANT is co-financed by the European Commission and European networks of national science and education, and non-profit organization managed by DANTE, which is tasked with planning, construction and operation of network infrastructure in Europe for the needs of science and education. Currently, a second stage of the project GEANT is realizing – GÉANT2 [10-12].

4. Research Infrastructures impacts evaluation

How are the RIs impacts evaluated?

The impacts of research infrastructures relate to the impacts of the research and innovation that they facilitate. These can be classified as direct scientific impacts, the new knowledge created and the theoretical advancement of science achieved via the research they facilitate, and indirect or technological impacts, the innovations in the production of goods and services that arise as spin-offs from the development of research infrastructures or the benefits accruing from the advances in scientific knowledge that stem from their operation [6].

a) **Economic** impact is evaluated:

- by number of commercial suppliers and scale of their support at design and construction phase;
- by number of scientists, students, state-owned or private enterprises that benefitted from RI services at operational phase.

b) Impacts **on innovation** are evaluated:

- by number of joint development activities with suppliers and number of contracts concluded for high-tech or specialist services at design and construction phase;
- by number of collaborative research projects and volume of funding at operational phase.

c) Impacts **on human resource capacity** are evaluated at operational phase:

- by number of new jobs for research and technical staff;
- by number of Master thesis defended, where knowledge and skills gained on RI were exploited;
- by number of graduates trained on RI;
- by number of foreign students as % of all students trained on RI;
- by data on the post-diploma employment path of those graduates trained on RI.

d) The impact of RI **on scientific activities** can result in accumulation of new knowledge and methodologies to push the boundaries of fundamental science. There is an inherent tension between the development of non-proprietary research, which is published in relevant scientific journals and can be accessed by other

interested parties, and propriety research where knowledge and technical data, which can be basis for specific inventions, are not disclosed openly.

Open access to RI also induces more regular inward flow of researchers promoting closer involvement of local teams in international research networks (brain exchange). Such interaction can generate important learning effects for experienced and early stage researchers alike. Increase in international recognition of leading scientists and the capacity of research teams can attract further international competitive funding to the research system. In addition, researcher experience gained during the set-up and operational phase of RI can have further policy impact through contributions to RI roadmaps.

Impacts *on scientific activity* are evaluated at operational phase:

- by number of articles published in the ISI¹ level international scientific journals as a direct result of research using RI;
- by number of methodologies/designs developed;
- by international patents granted and published patent applications;
- by number of PhD dissertations completed;
- by number of scientific events organised on research topics directly relating to RI services.

e) Broader impacts *on society*.

Regarding wider social impacts, it is important to outline that research infrastructures can play an important role in scientific communication and scientific education. RI can be used to inspire school students to learn STEM² subjects. For example, large scale RI may organise open days for the general public or for schools. The policy decision on investment in RI can also be widely reflected in the press leading to increased public awareness of science.

Broader impacts *on society* are evaluated at operational phase:

- by number of organised RI open days for wider public and any available data on participant satisfaction with the events;

¹ ISI level – is International Scientific Indexing. The ISI server provides indexing of major international journals and proceedings. Author can get information about international journal impact factor, proceedings (research papers) and information on upcoming events. All the journal pages have pointers to Web pages of the publishers which are integrated into the ISI stream pages. The purpose is to increase the visibility and ease of use of open access scientific and scholarly journals. If your journal is indexed & got validated stamp from ISI, you can request for the calculation of impact factor for your journal.

² STEM (SCIENCE, TECHNOLOGY, ENGINEERING, MATH) is complex multidisciplinary approach to the education. It combines natural sciences with technologies, engineering and mathematics. As in life all subjects are integrated and correlated into the one whole model. Now the conception STEM-education is inculcated more active into different educational programmes in many countries. International conferences are holding, STEM-centers are organized. It is very important to learn the science, engineering and mathematics in integrality because these domains are correlated closely in practice [13].

- by number of press articles on the investment in research infrastructure; by number of new or improved products, services, solutions as a result of research using RI that are diffused in society;
- by account of improved local infrastructure, community services, increase in local cultural/recreational activities due to RI.

5. Conclusions

European Commission Expert Group on Research Infrastructures gave such recommendations [4]:

1. New approaches to European wide collaboration in constructing and using research infrastructures with active inclusion of the smaller EC countries and new Member States should be established.
2. Fostering human resources is key to the efficient operation and the long term vitality of RIs.
3. The close relationship between universities and RIs contributes to an effective educational and scientific ecosystem, which can be attractive and supportive for industry.

The strengthening the concept of the European Research Area will create a unified all across Europe which will:

- enable researches to move and interact seamlessly, benefit from world-class infrastructures and work with excellent networks of research institutions;
- share, teach, value and use knowledge effectively for social, business and policy purposes;
- develop strong links with partners around the world so that Europe benefits from worldwide progress of knowledge, contributes to global development and takes a leading role in international initiatives to solve global issues.

REFERENCES

1. Horizon 2020 materials: <https://ec.europa.eu/programmes/horizon2020/h2020-sections>
2. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* "NONLINEAR DYNAMICS - 2016" CONFERENCE // Strength of Materials and Theory of Structures 97 (2016). In press.(in Ukrainian)
3. European Commission materials: http://ec.europa.eu/research/infrastructures/index_en.cfm?pg=what
4. Report of the Expert Group on Research Infrastructures: T.Andersson, P. Elias (Rapporteur), A. Vutsova, K. Koski, K. Lochte, C. Vassilakos, Members of the EC's Expert Group on Research Infrastructures: G.Leon (Chair) A vision for strengthening world-class research infrastructures in the ERA. 2010
5. Project ERA-Instruments recommendations: *Thomas Gubitzi Johannes Janssen Christian Renner* Mid-Size Instrumentation in the Life Sciences: III. Development of Research Infrastructures in Europe . 2008-2012. <http://steamedu.com/>
6. Methodological guidance document: Griniece, E., Reid, A. and Angelis, J. Evaluating and Monitoring the Socio-Economic Impact of Investment in Research Infrastructures.(2015)

7. Згуровський М. З., Якименко Ю. І., Тимофеев В. І. Інформаційні мережеві технології в науці і освіті // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2002.
8. <http://www.uran.net.ua/>
9. <http://podrobnosti.ua/652378-nauchnaja-set-uran-podkljuchilas-k-seti-geant.html>
10. <http://www.geant.net/Pages/default.aspx>
11. http://www.geant.org/Services/Trust_identity_and_security/eduGAIN
12. <https://www.eduroam.org/>
13. <http://womo.com.ua/stem-obrazovanie-v-ukraine-perspektivvi-razvitiya/>

Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Геращенко О.В.

ДОСЛІДНИЦЬКІ ІНФРАСТРУКТУРИ В СУЧАСНІЙ ЄВРОПЕЙСЬКІЙ НАУЦІ

Стаття є коротким оглядом та коротким викладом, інколи компіляцією, робіт, в яких роз'яснюється сучасне поняття Дослідницькі Інфраструктури. Дана також коротка інформація про Академічні та Дослідницькі мережі URAN та GEANT. Описується ефект та вплив Дослідницьких Інфраструктур на економіку, інновації, наукову діяльність та суспільство.

Ключові слова: дослідницька інфраструктура, наука, знання, освіта, кооперація, наукове товариство, Академічні та Дослідницькі мережі.

Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Геращенко О.В.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ИНФРАСТРУКТУРЫ В СОВРЕМЕННОЙ ЕВРОПЕЙСКОЙ НАУКЕ

Эта статья представляет собой краткий обзор и краткое изложение, иногда компиляцию, работ, объясняющих современное понятие Исследовательские Инфраструктуры. Дана краткая информация об Академических и Исследовательских сетях URAN и GEANT. Описывается эффект и влияние Исследовательских Инфраструктур на экономику, инновации, научную деятельность и общество.

Ключевые слова: исследовательская инфраструктура, наука, знания, образование, кооперація, научное сообщество, Академические и Исследовательские сети.

UDC 539.3

Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Gerashchenko O.V. **Research Infrastructures in Contemporary European Science** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – P. 119-127.

This article is short review and summary, sometimes compilation, of the works explaining the contemporary conception Research Infrastructures (RI). The short information about Academic and Research Networks URAN and GEANT is given. The impacts of RIs on economics, on innovation, on scientific activity, and on society are described.

Table 0. Fig. 1. Ref. 13

УДК 539.3

Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Геращенко О.В. **ДОСЛІДНИЦЬКІ ІНФРАСТРУКТУРИ В СУЧАСНІЙ ЄВРОПЕЙСЬКІЙ НАУЦІ** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 119-127.

Стаття є коротким оглядом та коротким викладом, інколи компіляцією, робіт, в яких роз'яснюється сучасне поняття Дослідницькі Інфраструктури. Дана також коротка інформація про Академічні та Дослідницькі мережі URAN та GEANT. Описується ефект та вплив Дослідницьких Інфраструктур на економіку, інновації, наукову діяльність та суспільство.

УДК 539.3

Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Геращенко О.В. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ИНФРАСТРУКТУРЫ В СОВРЕМЕННОЙ ЕВРОПЕЙСКОЙ НАУКЕ // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 98. – С. 119-127.

Эта статья представляет собой краткий обзор и краткое изложение, иногда компиляцию, работ, объясняющих современное понятие Исследовательские Инфраструктуры. Дана краткая информация об Академических и Исследовательских сетях URAN и GEANT. Описывается эффект и влияние Исследовательских Инфраструктур на экономику, инновации, научную деятельность и общество.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки ПОГОРЕЛОВА Ольга Семенівна

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні.

Адреса домашня: 02147 Україна, м. Київ, вул. Русанівська Набережна 18, кв. 61, ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29

Мобільний тел.: +38(067) 606-03-00;

Домашній тел.: +38(044) 517-25-08;

E-mail: pogos13@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки ПОСТНИКОВА Тетяна Георгіївна

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПОСТНИКОВІЙ Тетяні Георгіївні.

Адреса домашня: 04210, Україна, м. Київ, пр. Героїв Сталінграду 24, кв. 17, ПОСТНИКОВІЙ Тетяні Георгіївні

Робочий тел.: +38(044) 245-48-29;

Мобільний тел.: +38(050) 353-47-19;

Домашній тел.: +38(044) 411-46-56;

E-mail: postan@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА ГЕРАЩЕНКО Олег Валерійович

Адреса домашня: 03162, Україна, м. Київ, вул. Зодчих 46, кв. 102, ГЕРАЩЕНКО Олег Валерійович

Адреса робоча: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ГЕРАЩЕНКУ Олегу Валерійовичу

Робочий тел.: +38(044)241-54-20

Мобільний тел.: +38(095)661-6052

E-mail: olg_guera@ukr.net

УДК 539.3

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЦИЛІНДРАХ АБО ДИСКАХ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

О.К. Гревцев¹

старший науковий співробітник

Н.Ю. Селіванова²

старший викладач

¹ *Державне підприємство**«Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна»*² *Національний транспортний університет*

Розглянуто динамічну поведінку, яка не є усталеним процесом, механічної системи (циліндра або диска, що обертається навколо нерухомої осі) при імпульсних навантаженнях. Показано, що перехідні процеси спричиняють появу теплових ефектів, які виникають при дії зовнішніх навантажень на циліндр або диск, що обертається. Отримані розв'язки диференційного рівняння теплопровідності гіперболічного типу, яке не допускає нескінченної швидкості розповсюдження температурних збурень, на відміну від диференційного рівняння теплопровідності параболічного типу Фур'є. Розв'язані диференціальні рівняння обертання циліндра або диска навколо нерухомої осі. Показано, що рівняння руху і рівняння теплопровідності непрямо пов'язані.

Ключові слова: ізотропне пружне середовище, перехідний процес, термодинамічно обернений процес, доцентрова сила, момент обертання, кутова швидкість, час релаксації.

Динамічна поведінка механічних систем частіше розглядається як усталений процес, який не дозволяє дослідити зміну їх динамічних характеристик. При вивченні перехідних процесів, наприклад, при обертанні механічних систем, може бути досліджена зміна кутової швидкості за часом і визначена її величина після того, коли в механізмі відбулося збурення. Зазвичай механічні системи знаходяться під дією різноманітних змінних та імпульсних процесів. Тому важливо перевірити поведінку цих систем при імпульсних навантаженнях, які відрізняються від усталеного процесу. Окрім того, перехідні процеси дають змогу переконатися у появі деформацій та теплових ефектів, які обумовлені дією зовнішніх навантажень. Будь-яка деформація, у тому числі й пружна, супроводжується тепловими ефектами, тому намагання описати поведінку суцільного середовища тільки за механічною схемою, ігноруючи термомеханічні взаємодії всередині середовища, зазнає труднощів [1].

Розглянемо динамічну поведінку вала або циліндра суцільного чи з центральним отвором кінцевої довжини, в тому числі і круговий диск постійної товщини. Розв'язання задач динаміки таких тіл можна об'єднати за

рахунок застосування точного розв'язку рівнянь теорії пружності, отриманого на основі розробленого одним з авторів метода [9].

Відомо з літератури [2, 3], що відсутній точний розв'язок задачі теорії пружності навіть для диска постійної товщини, який обертається зі сталою швидкістю. Ця задача розв'язується на основі гіпотез плоско-напруженого стану [3].

Припустимо, що об'ємні сили та тепловий потік, який з'являється від дії зовнішніх сил на тіло, повільно змінюються за часом. Тоді можна знехтувати інерційними членами в рівняннях руху і розглядати рух, як деяку послідовність станів рівноваги. Цей підхід до розв'язання задач динамічної теорії пружності називається квазістатичним. При квазістатичному розгляданні неусталених напружень час $t \in$ параметром [1,4,7] і тому використовують розв'язок відповідних стаціонарних задач.

Вище було зазначено, що деформація суцільного пружного середовища не завжди є суто механічним явищем, бо зміна температури в тілі може відбуватися як в результаті самого процесу деформування, так і за сторонніх причин [5].

Розглянемо в рамках теорії пружності зміну температури в тілі від дії зовнішніх сил. Зокрема, для циліндра або диска, який обертається навколо нерухомої осі, зовнішні об'ємні сили можуть бути представлені радіальною доцентровою силою:

$$F_r = \rho \omega^2 \tau, \quad (1)$$

де ρ – щільність матеріалу, r – радіальна координата, $\omega = \omega(t)$ – зміна за часом кутова швидкість тіла.

Нехай у недеформованому і ненапруженому стані циліндр має температуру T_0 , наприклад, нуль. Внаслідок дії доцентрової сили інерції (1) циліндр деформується, а його температура змінюється. Відомо, що зміна температури в тілі характеризується температурною змінною, яка обчислюється за формулою

$$\theta = T - T_0,$$

де T – абсолютна температура точки тіла.

Будемо вважати, що температурна змінна $\theta(r, z, t)$ мала і це не викликає змін існуючих фізико-механічних характеристик матеріалу тіла [4].

Отже, під час деформації змінюється температура точки тіла і в результаті може відбуватися поглинання або виділення тепла пружним неізолюваним тілом при його взаємодії з навколишнім середовищем [8]. Якщо деформації тіла малі, то при зупинці дії об'ємних сил (тобто $F_r = \rho \omega^2 \tau$) тіло (циліндр або диск) повертається у початковий недеформований стан. Такі деформації називаються пружними. При

цьому процес деформування тіла відбувається дуже повільно і є термодинамічно оберненим [5].

У роботі [9] наведено розв'язок задачі обертання кругового полого циліндра кінцевої довжини або диска постійної товщини навколо нерухомої осі без урахування яких-небудь спеціальних гіпотез, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності. Показано, що при дії доцентрової сили (1) спостерігається зміна температурного поля тіла, при цьому змінна $\theta(z)$ залежить від швидкості обертання тіла. Розв'язок було отримано для усталеного процесу деформування тіла, тобто без урахування часу (стаціонарна задача). У формулі (1) кутова швидкість тіла ω приймалась сталою величиною, тобто не залежала від часу.

Отримані формули для напружень, що збігаються з напруженнями, знайденими на основі гіпотез плоско-напруженого стану, мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right), \\ \sigma_{13} &= \sigma_{33} = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Температурна змінна $\theta(z)$ дорівнює

$$\theta(z) = -\frac{\nu}{4G\alpha} z^2 \rho \omega^2. \quad (3)$$

Також визначена потужність потоку тепла на основі рівняння теплопровідності Фур'є з урахуванням незалежності від часу температурної змінної $\theta(z)$:

$$W = \frac{\nu \lambda}{2G\alpha} \rho \omega^2. \quad (4)$$

Враховуючи вище наведене, розглянемо задачу про перехідні процеси в циліндрах або дисках, що обертаються навколо нерухомої осі. Температура в будь-якій точці тіла в циліндричних координатах в момент часу t описується рівнянням теплопровідності Фур'є в частинних похідних [10]

$$\Delta T - \frac{1}{\alpha} T_{,t} + \frac{1}{\lambda} W = 0, \quad (5)$$

де $\alpha = \lambda/c\rho$ – температуропровідність, λ – коефіцієнт теплопровідності, c – питома теплоємність, ρ – щільність тіла, W – кількість тепла, яке виділяється або поглинається одиницею об'єму тіла за одиницю часу.

У випадку, коли температурна змінна $\theta(r, z, t)$ має вигляд $\theta = T - T_0$, рівняння теплопровідності (5) буде мати вид

$$\Delta \theta - \frac{1}{\alpha} \theta_{,t} + \frac{1}{\lambda} W = 0. \quad (6)$$

Основним недоліком класичної теорії теплопровідності Фур'є, є те, що розповсюдження тепла в тілі описується диференціальним рівнянням параболічного типу (6), яке допускає нескінченну швидкість розповсюдження тепла [10]. Це несумісне з фізичною суттю процесу, що розглядається. Іншим напрямком розвитку теорії теплопровідності є різноманітні узагальнення класичної теорії. Так, в роботі [10] шляхом введення характеристики швидкості теплової енергії, отримано більш загальне рівняння теплопровідності гіперболічного типу, яке не допускає нескінченну швидкість розповсюдження температурних збурень. Оскільки тепловий потік \bar{q} встановлюється не миттєво, а характеризується кінцевим часом релаксації Максвелла $\tau/2$, то узагальнений закон теплопровідності в ізотропному пружному середовищі записується у вигляді [10]

$$\bar{q} + \frac{\tau}{2} \bar{q}_{,t} = -\lambda \text{grad} \theta. \quad (7)$$

Коли $\tau = 0$, вектор теплового потоку визначається за звичайним законом Фур'є, тобто:

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad} \theta. \quad (8)$$

Рівняння неперервності для переносу тепла має вигляд

$$\rho c \theta_{,t} = -\text{div} \bar{q} + W. \quad (9)$$

Диференціюючи вираз (9) за часом t і роблячи деякі математичні перетворення, отримаємо узагальнене рівняння теплопровідності в циліндричних координатах (r, z)

$$\Delta \theta - \frac{1}{\alpha} (\theta_{\theta e} + \frac{\tau}{2} \theta_{\theta e e}) + \frac{1}{\lambda} (W + \frac{\tau}{2} W_{,t}) = 0. \quad (10)$$

Коли $\tau = 0$, рівняння (10) має вигляд звичайного рівняння Фур'є (6)

$$\Delta \theta - \frac{1}{\alpha} \theta_{\theta e} + \frac{1}{\lambda} W = 0. \quad (11)$$

Коли температурна змінна $\theta = T - T_0$ не залежить від часу, тоді рівняння теплопровідності набуває вигляду

$$\Delta \theta + \frac{1}{\lambda} W = 0. \quad (12)$$

У випадку теплоізованого тіла, тобто коли тіло не обмінюється теплом з оточуючим середовищем і відсутнє тепло в самому тілі ($W = 0$), рівняння (10) приймає вид

$$\Delta \theta = 0. \quad (13)$$

В загальному випадку у правій частині рівняння (10) може стояти член, який залежить від зовнішнього навантаження, наприклад, від об'ємної доцентрової сили F_r , за допомогою якої можуть бути

представлені деформації тіла. Тоді можна отримати залежність деформацій тіла від температурної змінної θ , при цьому рівняння руху і рівняння теплопровідності будуть непрямо пов'язані.

Задача про перехідні процеси в циліндрах або дисках, що обертаються, потребує розв'язання диференціальних рівнянь обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. При дії на циліндр або диск будь-якого моменту обертання $M(t)$, диференціальне рівняння обертального руху тіла має вигляд

$$J\omega(t)_{,t} = M, \quad (14)$$

де J – момент інерції циліндра або диска відносно осі обертання Z , $\omega(t)$ – зміна кутової швидкості за часом.

Нехай циліндр або диск зазнає дію моменту обертання, який змінюється за законом:

$$M(t) = M_0 - \beta\omega(t), \quad (15)$$

де M_0 – сталий момент обертання у початковий момент часу $t = 0$, кутова швидкість $\omega(t) = 0$ при $t = 0$; M_0 і β – деякі додатні довільні, які характеризують рух циліндра або диска, що обертається (наприклад, ротора гіроскопа).

Необхідно визначити закони зміни кутової швидкості $\omega(t)$ в період розгону циліндра або диска, тобто при вмиканні моменту обертання M_0 при $t = 0$ і при його вимиканні ($t = t_0$). Сили тертя враховані довільними M_0 та β .

Диференціальне рівняння обертання тіла (14) набуває вигляду

$$J\omega(t)_{,t} = M_0 - \beta\omega(t)$$

або

$$\omega(t)_{,t} + \frac{1}{\tau}\omega(t) = \frac{1}{\tau}\omega_0(t), \quad (16)$$

де $\tau = J/\beta$ – час релаксації; $\omega_0 = M_0/\beta$.

Розв'язок рівняння (16) відносно $\omega(t)$ має вид

$$\omega(t) = \frac{M_0}{\beta}(1 - e^{-t/\tau}). \quad (17)$$

Це рівняння є законом зміни кутової швидкості за часом.

При $t \rightarrow \infty$ $\omega_{уст.} = M_0/\beta = \omega_{(0)}$; $\omega(t)|_{t=0} = 0$. Кутова швидкість циліндра або диска монотонно збільшується до свого граничного значення, яке відповідає усталеному процесу $\omega_{уст.} = \omega_0$.

Таким чином

$$\omega(t) = \omega_0(1 - e^{-t/\tau}). \quad (18)$$

Процес розгону двигуна циліндра або диска, що обертається, називають перехідним процесом. Перехідний процес для більшості електродвигунів є скінченим, коли кутова швидкість ω досягає 0,95 свого граничного значення. Тривалість перехідного процесу або час розгону легко знайти з виразу (18)

$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad \tau = \frac{J}{\beta}.$$

При $\omega/\omega_0 = 0,95$ час $t = t_{пер.}$. Звідси

$$t_{пер.} = \tau \ln 20 \approx 3\tau.$$

Момент інерції ротора або кільця J та довільну β підбирають з таких умов, за яких час перехідного процесу знаходився в заданих границях $t_{пер.} \approx 2 - 3c$, тобто $J/\beta \approx 1$.

Припинемо дію постійного момента обертання M_0 при $t = t_0$ ($M_0 = 0$) вимикаючи двигун $\omega(t)|_{t=t_0} = \omega_0$. В цьому випадку з (16) маємо

$$J\omega(t),_t = -\beta\omega(t)$$

або

$$\omega(t),_t = -\frac{1}{\tau}\omega(t). \quad (19)$$

Остаточно отримаємо розв'язок рівняння (19) після зупинки двигуна у вигляді

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}. \quad (20)$$

З формули (20) при $t = t_0$ маємо $\omega = \omega_0$, при $t \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$.

Графіки перехідних процесів показані на рис. 1, 2.

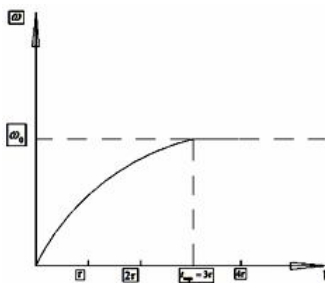


Рис. 1

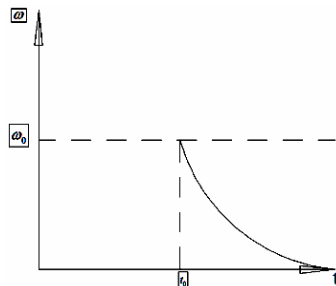


Рис. 2

Розглянемо температурну змінну (3) з урахуванням рівняння (18), тобто при розгоні двигуна циліндра або диска

$$\theta = -\frac{\nu}{4G\alpha} \rho \omega^2 z = -\frac{\nu}{4G\alpha} z^2 \rho \omega^2 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (21)$$

Рівняння (16) набуває вигляду

$$\omega_{,t} + \frac{1}{\tau} \omega = \frac{1}{\tau} \omega_0. \quad (22)$$

Множимо останнє на $-\frac{\nu}{4G\alpha} z^2 \rho$ і, враховуючи вираз (21), отримаємо

$$\frac{\tau}{\lambda} \theta_{,t} + \theta = \omega \omega_0 \left(-\frac{\nu}{4G\alpha} z^2 \rho\right). \quad (23)$$

Диференціюємо (23) за часом t

$$\frac{\theta}{\partial t} \left(\theta + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = \frac{\omega_0}{2\omega} \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (24)$$

Перемножаючи (24) на $-1/\alpha$ і додаючи вираз $\Delta\theta + \frac{1}{\lambda} \left(W + \frac{\tau}{2} \frac{\partial W}{\partial t} \right) = 0$, отримаємо загальне рівняння теплопровідності гіперболічного типу при дії доцентрової сили (1) на циліндр або диск, що обертається, при розгоні двигуна

$$\Delta\theta - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(W + \frac{\tau}{2} \frac{\partial W}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\omega_0}{2\omega} \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (25)$$

Знаходячи члени формули (25), а потім розв'язуючи рівняння відносно W , отримаємо потужність потоку тепла при розгоні двигуна циліндра або диска, що обертається

$$W = \frac{\lambda \nu}{2G\alpha} \rho \omega_0^2 \left[1 - 4e^{-t/\tau} + (2^{t/\tau} + 3)e^{-2t/\tau} \right]. \quad (26)$$

Розглянемо температурну змінну (3) з урахуванням рівняння (20) після вимикання двигуна

$$\theta = -\frac{\nu}{4G\alpha} \rho \omega_0^2 z^2 = -\frac{\nu z^2}{4G\alpha} \rho \omega_0^2 z^2 \frac{2^{-2(t-t_0)}}{\tau}. \quad (27)$$

З рівняння обертання (16) отримаємо

$$\tau \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega = \omega_0. \quad (28)$$

Роблячи перетворення, аналогічні наведеним вище, отримаємо загальне рівняння теплопровідності гіперболічного типу при дії доцентрової сили (1) на циліндр або диск, що обертається, при зупинці двигуна

$$\Delta\theta - \frac{1}{\alpha} (\theta_{,t} + \frac{\tau}{2} \theta_{,tt}) + \frac{1}{\lambda} (W + \frac{\tau}{2} W_{,t}) = 0. \quad (29)$$

Знаходимо члени формули (29), а потім розв'язуємо рівняння відносно W . В результаті отримуємо потужність потоку тепла при зупинці циліндра або диска

$$W = \frac{\lambda v}{2G\kappa} \rho \omega_0^2 \left(2 \frac{t-t_0}{\tau} + 1\right) e^{-2 \frac{t-t_0}{\tau}}. \quad (30)$$

Підставляючи рівняння (18) у формули (2), отримуємо значення напружень при розгоні двигуна циліндра або диска

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{3+v}{8} \rho \omega_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{r^2} - r^2), \\ \sigma_{22} &= \frac{3+v}{8} \rho \omega_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{r^2} - \frac{1+3v}{3+v} r^2). \end{aligned} \quad (31)$$

При зупинці циліндра або диска для напружень (2), враховуючи вираз (20), маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{3+v}{8} \rho \omega_0^2 (e^{-t-t_0/\tau})^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{r^2} - r^2), \\ \sigma_{22} &= \frac{3+v}{8} \rho \omega_0^2 (e^{-t-t_0/\tau})^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{r^2} - \frac{1+3v}{3+v} r^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким чином, важливе значення для багатьох практичних задач, в тому числі в розрахунках дисків турбін та валов механізмів, має розв'язання задачі про перехідні процеси в дисках і циліндрах, що обертаються навколо нерухомої осі, з визначенням напружень та теплового потоку в них.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.
2. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, Физматгиз, 1979. – 560 с.
3. *Ван Цзи-де.* Прикладная теория упругости. – М.: Фтзматгиз, 1959, –400 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. –М.: Мир, 1975. – 872 с.
5. *Ландау Л.Д. и Лившиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987ю – Т.8 – 246 с.
6. *Боли Б. и Дж. Уэйнер.* Теория температурных напряжений. –М.: Мир, 1964. – 517 с.
7. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963.–251 с.
8. *Фен Дж.* Машини, енергия, энтропия. – М.: Мир, 1986. – 336 с.
9. *Гревец О.К.* Осесиметричні деформації для циліндра, що обертається// Вісник НТУ. – К.: НТУ – 2011.– Вип. 23 – с. 187 – 192.
10. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. –567 с.

REFERENCES

1. *Germain P.* Cours mehaniki sploshnyih sred (Cours de mécanique des milieux continus). – М.: Vysshaya shkola, 1983. – 399 p.
2. *Timoshenko S.P., Goodier J.* Teoriya uprugosti (Theory of Elasticity). - М.: Nauka, Fizmatgiz, 1979. – 560 p.

3. *Vang Chi-Teh*. Prikladnaya teoriya uprugosti. (Applied Elasticity) – M.: Ftzmatgiz, 1959, –400 p.
4. *Novatskiy V.* Teoriya uprugosti (Theory of Elasticity). –M.: Mir, 1975. – 872 p.
5. *Landau L.D. i Livshits E.M.* Teoriya uprugosti (Theory of Elasticity). – M.: Nauka, 1987yu – T.8 – 246 p.
6. *Boli B. i Dzh. Ueyner.* Teoriya temperaturnyih napryazheniy (Theory of temperature stresses). – M.: Mir, 1964. – 517 p.
7. *Parkus G.* Neustanivshiesya temperaturnyie napryazheniya (Unsteady temperature stresses). – M.: Fizmatgiz, 1963.–251 p.
8. *Fen Dzh.* Mashiny, energiya, entropiya (Machines, energy, entropy). – M.: Mir, 1986. – 336 p.
9. *Grevtsev O.K.* Osesimetriczni deformatsii dlya tsilindra, scho obertaetsya // VIsnik NTU. – K.: NTU – 2011.– Vip. 23 – P. 187 – 192.
10. *Lyikov A.V.* Teoriya teploprovodnosti (Theory of heat conductivity). – M.: Vysshaya shkola, 1967. –567 p.

Hrevtsev O.K., Selivanova N.Yu.

TRANSIENT PROCESSES IN ROTATING CYLINDERS OR DISKS

The mechanical system "Rotating disk or cylinder" is considered under intensive loads, which differ from the steady-state process. The solutions to the equations of the theory of elasticity for a steady-state process are only part of the solution of the problem, because after some change of the system in time the angular velocities do not cease instantly. The mechanical system under consideration is under the influence of various variables and impulse processes. Therefore, in the proposed article, the behavior of the considered mechanical system, in particular a rotating disk of constant thickness or a cylinder of finite length with a pulsed load, which is different from the steady-state process, was checked. The assumption of a slow change in time of the volumetric centrifugal force and heat flux, which appears under the action of an external load, leads to the consideration of motion as a certain sequence of the equilibrium state. Such an approach to solving problems of the dynamic theory of elasticity is called quasistatic. In quasistatic analysis of unsteady stresses, time is a parameter and therefore solutions for the corresponding stationary problems can be used.

It is shown that transient processes cause the appearance of thermal effects that arise under the action of external loads. The action of external loads leads to the appearance of deformation and a change in temperature in the body under investigation. Any deformation, including elastic, is accompanied by thermal effects and therefore an attempt to describe the behavior of a continuous medium only by a mechanical scheme, ignoring the thermomechanical interaction inside the medium is difficult. Thus, during the deformation, the temperature of the body point changes, and as a result, absorption or release of heat by an elastic isolated body can occur, as it interacts with the surrounding medium. If the deformation of the body is small, then upon termination of the action of the volume forces that cause deformation, the body (cylinder or disk) returns to the initial undeformed state. The deformation process is very slow, that is, it will be thermodynamically reversible.

The solutions given are obtained taking into account the differential equation of heat conduction of a hyperbolic type that does not admit an infinite velocity of propagation of temperature perturbations, in contrast to the differential equation of heat conductivity of a parabolic Fourier type.

The differential equations of rotation of a rigid body around a fixed axis are solved. It is shown that the equation of motion and the heat equation are indirectly related.

Formulas of stresses for rotating disks or cylinders in transient processes are obtained for the first time and are of great importance for the solution of many practical problems.

Keywords: angular velocity; thermodynamically reversible process; centrifugal force; relaxation time; isotropic elastic medium; moment of rotation.

Гревец А.К., Селиванова Н.Ю.

ПЕРЕХОДНІЙ ПРОЦЕСС ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРАХ ИЛИ ДИСКАХ

Рассмотрена механическая система (вращающийся цилиндр или диск) при импульсных нагрузках, которые отличаются от устоявшегося процесса. Показано, что переходные процессы приводят к появлению тепловых эффектов, возникающих под действием внешних нагрузок.

Приведенные решения получены с учетом дифференциального уравнения теплопроводности гиперболического типа, не допускают бесконечной скорости распространения температурных возмущений, в отличие от дифференциального уравнения теплопроводности параболического типа Фурье.

Решены дифференциальные уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. При этом показано, что уравнения движения и уравнения теплопроводности косвенно связаны.

Ключевые слова: угловая скорость; термодинамически обратимый процесс; центробежная сила; время релаксации; изотропная упругая среда; крутящий момент.

УДК 539.3

Гревец А.К., Селиванова Н.Ю. **Перехідні процеси у циліндрах або дисках, що обертаються** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 128-137.

Розглянуто механічну систему (циліндр або диск, що обертається) при імпульсних навантаженнях, які відрізняються від усталеного процесу. Показано, що перехідні процеси спричиняють появу теплових ефектів, які виникають під дією зовнішніх навантажень.

Табл. 0. Іл. 2. Бібліогр. 10 назв.

Hrevtsev O.K., Selivanova N. **Transient processes in rotating cylinders or disks** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2017. - Issue 98. - S. 128-137. – Ukr.

A mechanical system (a rotating cylinder or disk) is considered for pulsed loads, which differ from the established process. It is shown that transient processes lead to the appearance of thermal effects arising under the action of external loads.

Табл. 0. Fig. 2. Bibliograph. 10 ref.

Гревец А.К., Селиванова Н.Ю. **Решение задачи теории упругости для круглых толстых плит при осесимметричной деформации** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2017. - Вып. 98. - С. 128-137.

Рассмотрена механическая система (вращающийся цилиндр или диск) при импульсных нагрузках, которые отличаются от устоявшегося процесса. Показано, что переходные процессы приводят к появлению тепловых эффектов, возникающих под действием внешних нагрузок.

Табл. 0 Ил. 2. Библиогр. 10 назв.

Автор (научовий ступінь, вчене звання, посада): Старший науковий співробітник Державного підприємства «Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна» ГРЕВЦЕВ Олександр Кімович

Адреса робоча: 03113, Україна, м. Київ, пр. Перемоги, 57, ГРЕВЦЕВУ Олександру Кімовичу

Робочий тел.: +38 044 242 75 96

Автор (научовий ступінь, вчене звання, посада): Старший викладач Національного транспортного університету, СЕЛІВАНОВА Нінель Юріївна

Адреса робоча: 01010, Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, СЕЛІВАНОВІЙ Нінель Юріївні

Робочий тел.: +38 044 280 38 19

Мобільний. тел.: +38 063 315 65 87

E-mail: nel_s@i.ua

УДК 534-21:537.226.86

ВАРІАЦІЙНО-СПЛАЙНОВИЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ТІЛ

О.І. Безверхий¹,
д-р фіз.-мат. наук,

Л.О. Григор'єва²,
канд. фіз.-мат. наук

¹Національний транспортний університет, Київ, Україна

²Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

На основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського і сплайн апроксимацій по одній координаті рівняння гармонійних осесиметричних електропружних коливань в циліндричних координатах зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь. Отримана крайова задача розв'язується методом дискретної ортогоналізації. Запропонована методика дозволяє ефективно досліджувати гармонійні коливання п'єзокерамічних тіл циліндричної форми при довільних граничних умовах. Визначено резонансні частоти радіально поляризованого порожнистого циліндра з п'єзокераміки PZT-4, досліджено його динамічний електромеханічний стан при моногармонічному електричному навантаженні.

Ключові слова: п'єзокерамічні циліндри, вимушені пружноелектричні коливання, електричне збурення, радіальна поляризація, принцип Гамільтона – Остроградського, сплайн-апроксимація.

Природні і синтезовані п'єзоелектричні матеріали завдяки їх здатності перетворення електричного поля в механічні деформації (зворотний п'єзоэффект) і механічних деформацій в електричне поле (прямий п'єзоэффект) знаходять широке застосування в пристроях радіоелектроніки і зв'язку, обчислювальної техніки, автоматики, вимірювальної техніки, приладах для контролю технологічних процесів, генераторах і приймачах механічних (акустичних) коливань в кіло- і мегагерцовому діапазоні. У зв'язку з цим актуальними є розробка і вдосконалення теоретичних і чисельних методів аналізу пружноелектричних гармонійних і нестационарних коливань на основі дискретних просторових континуальних рівнянь електропружності [5, 6, 8] і їх варіаційних тлумачень [3] з використанням чисельних апроксимацій по просторовій координаті, реалізація розроблених алгоритмів і проведення аналізу коливань напружено-деформованого стану і електричного поля типових п'єзокерамічних елементів. Для вирішення задач електропружності широко застосовуються різні методи сіткових апроксимацій, які або безпосередньо алгебраізують задачу, або зменшують її розмірність.

В статті [1] досліджуються вимушені електропружні коливання п'єзокерамічного циліндра на основі варіаційних принципів та сплайн-апроксимацій. В роботі [2] за допомогою процедури розділення змінних отримано набір крайових задач на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь. В [9-11] на основі прямого чисельного інтегрування рівнянь руху досліджуються вимушені коливання п'єзоелектричних тіл різної геометрії.

Варіаційно-різницевий метод (ВРМ) побудови сіткових апроксимацій запропоновано в роботах [6, 7]. Він поєднує переваги енергетичних підходів до континуальної постановки задач електропружності з прямими чисельними методами розв'язання осесиметричних задач коливань п'єзоелектричних тіл.

Для підвищення точності розрахунків порівняно з ВРМ в даній роботі для дослідження усталених коливань п'єзокерамічних циліндрів пропонується виходячи з варіаційного принципу по одній координаті застосовувати сплайн-апроксимацію, а по іншій розв'язувати систему звичайних диференціальних рівнянь методом дискретної ортогоналізації.

1. Постановка задачі. Процеси електропружності описуються теорією механічного деформування при взаємодії з квазістатичним наближенням електричного поля [5, 6, 8]. Так як в даній роботі досліджуються усталені коливання, то будь-яку з функцій, що описують динамічний електромеханічний стан тіла, можна представити у вигляді

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \text{Re}(\Phi(r, \theta, z)e^{-i\omega t}),$$

де ω - кругова частота. Надалі множник $e^{-i\omega t}$ будемо опускати.

При розв'язанні осесиметричних задач електропружності скористаємось варіаційним принципом Гамільтона-Остроградського [3, 6]

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k \right) + \sigma_{ik} \dot{K}_{ik} - D_k \dot{E}_k - f_k \dot{u}_k \right) dV - \oint_S (\sigma_{ik} n_i \dot{u}_k + D_i n_i \dot{\phi}) dS = 0,$$

де $\sigma_{ik} \dot{K}_{ik} - D_i \dot{E}_i = \dot{H}_{el}$ - зміна електричної ентальпії [6], n - нормаль до поверхні S об'єму V , K - тензор деформацій, D - електрична індукція, E - електричне поле, ϕ - різниця потенціалів, f - об'ємна сила. У цьому принципі допустимі функції вибираються так, щоб виконувались визначальні співвідношення, співвідношення Коші, градієнтні співвідношення для електричного потенціалу, а також крайові умови, що задаються на переміщення і потенціал електричного поля.

Для дослідження осесиметричних аксіально-радіальних коливань циліндрів потрібно врахувати умови симетрії

$$u_\theta = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_{zr}}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0,$$

співвідношення Коші

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2S_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

рівняння електростатики

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Умова стаціонарності функціоналу при відсутності механічних навантажень набуде вигляду:

$$\delta A = \delta_{u_r, u_z, \varphi} \int_V [\sigma_{rr} S_{rr} + \sigma_{zz} S_{zz} + \sigma_{\theta\theta} S_{\theta\theta} + 2\sigma_{rz} S_{rz} - E_r D_r - E_z D_z - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2)] dV = 0. \quad (1)$$

В функціонал (1) входять тільки перші похідні від шуканих функцій, в силу чого його стаціонарне значення можна шукати на лінійно-шматкових функціях. При використанні таких функцій незалежними змінними функціоналу стають ординати вершин ламаної, які утворюють дискретний і скінченний набір шуканих параметрів. Суть такого методу, таким чином, полягає в знаходженні такого набору параметрів $u_i(r, z_i)$, $\varphi(r, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, при якому функціонал $A(u_r, u_z, \varphi)$ набуває стаціонарного значення.

Перевага цього методу над звичайним різницевим методом забезпечується більш низьким порядком похідних, які апроксимуються. При побудові рівнянь за допомогою цього методу вдається уникнути протиріч в кутових точках області. У порівнянні з варіаційними методами, в яких використовується одна для всього тіла система базисних функцій, такий метод має перевагу через відсутність проблеми вибору цих функцій. Крім того, перевагою такого методу в порівнянні з методами, в яких використовуються кускові базисні функції, наприклад в методі скінченних елементів, є простота побудови розв'язувальної системи для геометрично простих областей і крайових умов в переміщеннях, а також відсутність процесу асамблювання. Матриця розв'язувальної системи має симетричну стрічкову структуру. На відміну від інших методів, схема такого методу дозволяє досить просто представити систему рівнянь розв'язання для будь-яких крайових умов.

2. Метод розв'язання. Для отримання дискретних рівнянь розіб'ємо область по осі r $N-1$ прямими лініями, паралельними осі r , з інтервалом $h_i = z_{i+1} - z_i$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$)

Представимо шукані функції на прямих у вигляді сплайна першого порядку [4], який є кусково-неперервною функцією

$$f(r, z) = f_i + (f_{i+1} - f_i)\xi_i = f_i(1 - \xi_i) + f_{i+1}\xi_i,$$

$$\xi_i = (z - z_i)/(z_{i+1} - z_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Відповідні похідні

$$dz = h_i d\xi, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f_i}{\partial r} (1 - \xi_i) + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial r} \xi_i, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{h_i} (f_{i+1} - f_i).$$

Функціонал (1) перетворюється до вигляду

$$A = \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_0^1 J_i d\xi dr = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{N-1} F_i dr. \quad (2)$$

Тут J_i - дискретні функціонали на стрічках (z_i, z_{i+1}) , отримані при застосуванні запропонованої сплайн-апроксимації.

При дійсних переміщеннях і потенціалах функціонал досягає стаціонарного значення

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \delta \sum_{i=0}^{N-1} F_i(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i, u'_{ri}, u'_{zi}, \Phi'_i) dr = \\ &= \int_{r_0}^{r_r} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial F_i}{\partial y'_k} \delta y'_k \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $y_1 = u_{ri}$, $y_2 = u_{zi}$, $y_3 = \Phi_i$.

Якщо провести інтегрування по z і задовольнити умови стаціонарності функціоналу згідно до (3), отримаємо систему рівнянь для знаходження переміщень і електричного потенціалу

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_{ri}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial u'_{ri}} &= F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial u_{zi}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial u'_{zi}} &= F_{zi}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \Phi_i} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial \Phi'_i} &= F_{\Phi_i}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з відповідними крайовими умовами будемо розв'язувати чисельно за допомогою методу дискретної ортогоналізації.

На зовнішніх поверхнях циліндра задаються переміщення або напруження згідно матеріальних співвідношень для попередньо поляризованої кераміки. До електродованих поверхонь циліндра прикладається різниця потенціалів, яка при закороченні електродів дорівнює нулю. На неелектродованих поверхнях електрична індукція $D_n = 0$. Таким чином, в загальному випадку на зовнішніх поверхнях $z = 0$, $z = L$, $r = r_0$, $r = r_r$ циліндра маємо змішані граничні умови у

вигляді лінійних комбінацій переміщень, електричного потенціалу та їх похідних

$$\begin{aligned}
 U_{z0}(u_{r0}, u_{z0}, \Phi_0, u_{r1}, u_{z1}, \Phi_1, u'_{r0}, u'_{z0}, \Phi'_0) &= G_{z0}, \\
 U_{zL}(u_{rN}, u_{zN}, \Phi_N, u_{rN-1}, u_{zN-1}, \Phi_{N-1}, u'_{rN}, u'_{zN}, \Phi'_N) &= G_{zL}, \\
 U_{r0}(u_{rj}, u_{zj}, \Phi_j, u'_{ri}, u'_{zi}, \Phi'_i) \Big|_{r=r_0} &= G_{r0}, \quad j = i-1, i, i+1, \quad i = 1, \dots, N-1; \\
 U_{rr}(u_{rj}, u_{zj}, \Phi_j, u'_{ri}, u'_{zi}, \Phi'_i) \Big|_{r=r_r} &= G_{rr}, \quad j = i-1, i, i+1, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (5)
 \end{aligned}$$

3. Коливання п'єзокерамічного циліндра з радіальною поляризацією. Матеріальні співвідношення для попередньої поляризованої кераміки в радіальному напрямку з урахуванням осьової симетрії мають вигляд [6]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= c_{13}^E S_{\theta\theta} + c_{13}^E S_{zz} + c_{33}^E S_{rr} - e_{33} E_r, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= c_{11}^E S_{\theta\theta} + c_{12}^E S_{zz} + c_{13}^E S_{rr} - e_{13} E_r, \\
 \sigma_{zz} &= c_{12}^E S_{\theta\theta} + c_{11}^E S_{zz} + c_{13}^E S_{rr} - e_{13} E_r, \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}^E S_{rz} - e_{15} E_z, \\
 D_z &= 2e_{15} S_{rz} + \varepsilon_{11}^S E_z, \quad D_r = e_{13} (S_{zz} + S_{\theta\theta}) + e_{33} S_{rr} + \varepsilon_{33}^S E_r.
 \end{aligned}$$

Функціонал (1) при підстановці матеріальних залежностей та співвідношень Коші приймає вигляд

$$\begin{aligned}
 J = \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J r dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L \{ & [2c_{13}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{33}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2e_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \\
 & + c_{55}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon_{33}^S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2] + [2c_{12}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{11}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + c_{55}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \\
 & + 2e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \varepsilon_{11}^S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2] + 2c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2c_{55}^E \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \\
 & + 2e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + [-\rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) + c_{11}^E \left(\frac{u_r}{r} \right)^2] \} r dr dz. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Тут r_0 і r_r - внутрішній і зовнішній радіуси відповідно, L - довжина циліндра.

Система вирішальних рівнянь (4) з врахуванням рівномірного розбиття ($h_i = h, i = 0, 1, \dots, N-1$) набуде вигляду

$$F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = rc_{33}^E D_1 + re_{33} D_3 + c_{33}^E A_1 + (e_{33} - e_{13}) A_3 + \frac{r}{2h} (c_{55}^E + c_{13}) A_5 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\rho \omega^2 r - \frac{c_{11}^E}{r} \right) B_1 + \frac{1}{2h} (c_{13}^E - c_{12}^E) B_5 + \frac{r c_{55}^E}{h^2} B_7 + \frac{r e_{15}}{h^2} B_9 = 0, \\
& F_{zi}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = r c_{55}^E D_2 + c_{55}^E A_2 + \frac{r}{2h} (c_{13}^E + c_{55}^E) A_4 + \\
& + \frac{r}{2h} (e_{13} + e_{15}) A_6 + \rho \omega^2 r B_2 + \frac{1}{2h} (c_{12} + c_{55}^E) B_4 + \frac{r c_{11}^E}{h^2} B_8 + \frac{e_{15}}{2h} B_6 = 0, \\
& F_{\varphi i}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = e_{33} r D_1 - \varepsilon_{33}^S r D_3 + (e_{33} + e_{13}) A_1 - \varepsilon_{33}^S A_3 + \frac{r}{2h} (e_{13} + e_{15}) A_5 + \\
& + \frac{e_{13}}{2h} B_5 - \frac{r}{h^2} \varepsilon_{11}^S B_9 + \frac{r e_{15}}{h^2} B_7 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7)
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 u_{ri+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u_{ri}}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 u_{ri-1}}{dr^2} \right), \quad D_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 u_{zi+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u_{zi}}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 u_{zi-1}}{dr^2} \right), \\
D_3 &= \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 \varphi_{i+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 \varphi_i}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 \varphi_{i-1}}{dr^2} \right), \\
A_1 &= \left(\frac{1}{6} \frac{du_{ri+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{du_{ri}}{dr} + \frac{1}{6} \frac{du_{ri-1}}{dr} \right), \quad A_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{du_{zi+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{du_{zi}}{dr} + \frac{1}{6} \frac{du_{zi-1}}{dr} \right), \\
A_3 &= \left(\frac{1}{6} \frac{d\varphi_{i+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{d\varphi_i}{dr} + \frac{1}{6} \frac{d\varphi_{i-1}}{dr} \right), \quad A_4 = \left(\frac{du_{ri+1}}{dr} - \frac{du_{ri-1}}{dr} \right), \\
A_5 &= \left(\frac{du_{zi+1}}{dr} - \frac{du_{zi-1}}{dr} \right), \quad A_6 = \left(\frac{d\varphi_{i+1}}{dr} - \frac{d\varphi_{i-1}}{dr} \right), \\
B_1 &= \left(\frac{1}{6} u_{ri+1} + \frac{2}{3} u_{ri} + \frac{1}{6} u_{ri-1} \right), \quad B_4 = (u_{ri+1} - u_{ri-1}), \quad B_7 = (u_{ri+1} - 2u_{ri} + u_{ri-1}), \\
B_2 &= \left(\frac{1}{6} u_{zi+1} + \frac{2}{3} u_{zi} + \frac{1}{6} u_{zi-1} \right), \quad B_5 = (u_{zi+1} - u_{zi-1}), \quad B_8 = (u_{zi+1} - 2u_{zi} + u_{zi-1}), \\
B_3 &= \left(\frac{1}{6} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} \varphi_i + \frac{1}{6} \varphi_{i-1} \right), \quad B_6 = (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}), \quad B_9 = (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}).
\end{aligned}$$

Введемо безрозмірніювання

$$\begin{aligned}
\bar{r} &= \frac{r}{R}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{33}}{c_{33} R^2}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}, \quad \bar{\rho} = 1, \\
\bar{c}_{ij} &= \frac{c_{ij}^E}{c_{33}^E}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{33}^S}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^E}}. \quad (8)
\end{aligned}$$

При цьому вигляд рівнянь не зміниться. Надалі знаки безрозмірності будемо опускати.

4. Чисельний метод розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді ($n = N - 1$)

$$\mathbf{Y} = \{u_{r1}, \dots, u_{rn}, u_{z1}, \dots, u_{zn}, \Phi_1, \dots, \Phi_n, u'_{r1}, \dots, u'_{rn}, u'_{z1}, \dots, u'_{zn}, \Phi'_1, \dots, \Phi'_n\} = \\ = \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}, y_{2n+1}, \dots, y_{3n}, y_{3n+1}, \dots, y_{4n}, y_{4n+1}, \dots, y_{5n}, y_{5n+1}, \dots, y_{6n}\}.$$

Тоді систему рівнянь (7) можна представити в вигляді

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dr} = \begin{cases} \frac{dy_i}{dr} = y_{3n+i}, \\ \frac{dy_{3n+i}}{dr} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} - \mathbf{B}\mathbf{Y}), \quad i = 1, \dots, 3n. \end{cases} \quad (9)$$

Тут \mathbf{B} - матриця коефіцієнтів системи (7) при переміщеннях та електричному потенціалі, \mathbf{A} - при їх перших похідних, \mathbf{M} - при других похідних. Матриці мають стрічкову форму, що спрощує знаходження чисельного розв'язку.

Розглянемо циліндр з закороченими мембранно закріпленими торцями [2]

$$u_r(r, 0) = \sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad u_r(r, l) = \sigma_{zz}(r, l) = 0, \quad \varphi(r, 0) = \varphi(r, l) = 0.$$

Нехай циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\sigma_{rr}(r_0, z) = \sigma_{rz}(r_0, z) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_r, z) = \sigma_{rz}(r_r, z) = 0.$$

До електродів на циліндричних поверхнях прикладена різниця потенціалів, яка змінюється за гармонічним законом з частотою ω і амплітудою $2V_0$:

$$\varphi(r_0, z, t) = -V_0 \sin \omega t, \quad \varphi(r_r, z, t) = V_0 \sin \omega t.$$

При переході до вектору змінних \mathbf{Y} граничні умови на циліндричних поверхнях перетворюються до вигляду ($i = 1, \dots, n$)

$$\frac{c_{13}^E}{r_0} y_i(r_0) + c_{13}^E \frac{y_{n+i+1}(r_0) - y_{n+i-1}(r_0)}{2h} + c_{33}^E y_{3n+i}(r_0) + e_{33} y_{5n+i}(r_0) = 0,$$

$$c_{44}^E \left(y_{4n+i}(r_0) + \frac{y_{i+1}(r_0) - y_{i-1}(r_0)}{2h} \right) + e_{42} \frac{y_{2n+i+1}(r_0) - y_{2n+i-1}(r_0)}{2h} = 0,$$

$$y_{2n+i}(r_0) = -1;$$

$$\frac{c_{13}^E}{r_r} y_i(r_r) + c_{13}^E \frac{y_{n+i+1}(r_r) - y_{n+i-1}(r_r)}{2h} + c_{33}^E y_{3n+i}(r_r) + e_{33} y_{5n+i}(r_r) = 0;$$

$$c_{44}^E \left(y_{4n+i}(r_r) + \frac{y_{i+1}(r_r) - y_{i-1}(r_r)}{2h} \right) + e_{42} \frac{y_{2n+i+1}(r_r) - y_{2n+i}(r_r)}{h} = 0;$$

$$y_{2n+i}(r_r) = 1. \quad (10)$$

Отримана система рівнянь розв'язується за допомогою методу колокацій або методу дискретної ортогоналізації. На сітці 50×30 результати відрізняються не більше ніж на 2%. При подальшому збільшенні точок розбиття похибка зменшується, але помітно збільшується час розрахунку, що істотно в задачах на визначення власних частот перетворювача.

5. Аналіз отриманих результатів. Проаналізуємо коливання радіально поляризованого порожнистого циліндра з кераміки PZT-4 [6]. Для тестування розробленого підходу розглянемо циліндр із наступними розмірами: $r_r = 6 \text{ см}$, $r_0 = 4 \text{ см}$, $L = 20 \text{ см}$. Торці мембранно закріплені і закорочені, вільні від механічних навантажень електродовані циліндричні поверхні навантажені різницею потенціалів. Аналогічна задача розглядалася в роботі [2], де запропоновано розв'язання задачі про вимушені коливання циліндра на основі розкладання в степеневі ряди. Отримані результати візуально відповідають результатам, представленим в роботі [2], з точністю до обезрозмірення. Наприклад, в [2] маємо власні частоти $\Omega \approx (0,44; 0,76; 0,8)$ при обезрозміренні $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} =$

$= \omega \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{7500}{10^{10}}} = 8,66 \cdot 10^{-6} \omega$, тобто розмірні власні частоти для циліндра $\omega_1 = 50,8 \text{ кГц}$, $\omega_2 = 87,7 \text{ кГц}$, $\omega_3 = 92,4 \text{ кГц}$.

З рис. 1 маємо $\Omega \approx (0,66; 1,14; 1,18; 1,66; 2,22)$ при обезрозмірюванні

$$\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^E}} = \omega \cdot 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{7500}{11,5 \cdot 10^{10}}} = 12,77 \cdot 10^{-6} \omega.$$

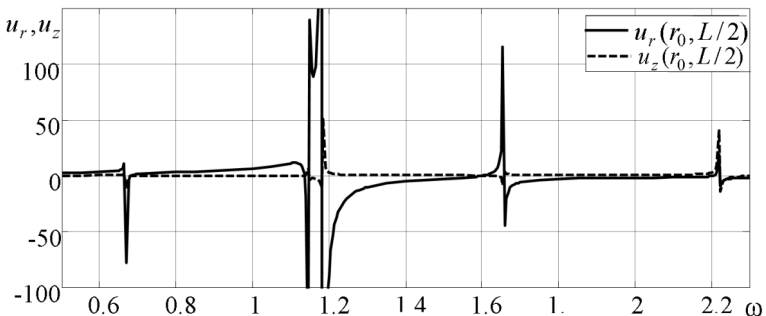


Рис. 1

Розмірні власні частоти $\omega_1 = 51,7кГц$, $\omega_2 = 89,3кГц$, $\omega_3 = 92,4кГц$, $\omega_4 = 13кГц$, $\omega_5 = 174кГц$. Маємо відхилення на першій і другій частотах в межах 2%, третя частота збіглася більш точно.

На рис. 2 наведені криві розподілу амплітудних значень радіальних і поздовжніх переміщень на циліндричних поверхнях циліндра при частоті

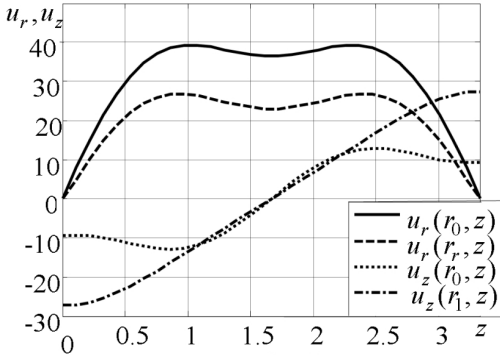


Рис. 2

Рис. 3 ілюструє розподіл напружень в перетинах циліндра. Максимальними є окружні напруження на внутрішній поверхні циліндра.

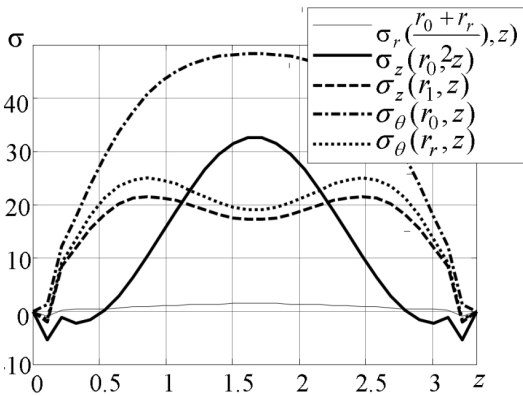


Рис. 3

прямку - $D_{z \max} = D_z(r_0, 0) = -D_z(r_0, L) = 16$.

Висновок. Запропонована методика має ряд переваг над пошуком розв'язків розглядуваних задач шляхом розділення змінних [2] та ВРМ [6],

$\bar{\omega} = 1,1$ поблизу другої власної частоти. Представлені результати отримані методом дискретної ортогоналізації на сітці 50×30 точок. При обчисленнях взято $\bar{V}_0 = 1$, тобто при переході до розмірної задачі отримані результати перетворюються згідно (8) і множаться на коефіцієнт $\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{\epsilon_{33}}{c_{33}}}$.

Максимальні радіальні напруження в циліндрі

$$\sigma_{r \max} = \sigma_r \left(\frac{r_0 + r_1}{2}, \frac{L}{2} \right) = 1,1,$$

що набагато менші за амплітудні значення поздовжніх і окружних напружень. Максимальні значення електричної індукції в радіальному напрямку становлять

$$D_{r \max} = D_r \left(r_0, \frac{L}{2} \right) = 38, \text{ в}$$

поздовжньому напрямку

так як вона передбачає отримання системи звичайних диференціальних рівнянь (9), яка є зручною для розв'язання і не потребує вирішення алгебраїчних систем великого порядку, як у ВРМ, або сумування великої кількості членів ряду. Розвинутий підхід завдяки застосуванню принципу Гамільтона-Остроградського дозволяє ефективно досліджувати усталені коливання п'єзокерамічних циліндричних тіл при довільних граничних умовах та електричних або механічних навантаженнях. Дослідження збіжності і точності методу для тіл іншої геометрії або при інших граничних умовах зручно робити варіацією кількості точок розбиття і шляхом зміни напрямку сплайн-аппроксимаций. При дослідженні коливань конкретних електромеханічних перетворювачів запропонована методика дає змогу визначати резонансні частоти, форми коливань, електромеханічний стан тіла при моногармонічних навантаженнях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Безверхий О.І., Григор'єва Л.О.* Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – Вип. 24. – С. 5-17.
2. *Болкисев А.М., Шульга Н.А.* Вынужденные колебания пьезокерамического полого цилиндра (радиальная поляризация) // Прикл. механика. - 1985. - 21, № 5. - С. 118-121.
3. *Вашизу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Мир, 1987. - 542 с.
4. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. - М: Наука, 1980. - 350 с.
5. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти томах / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Электроупругость / *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* - М.: Мысль, 1989. - 280 с.
6. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезокерамических тел. - К.: Наукова думка, 1990. - 228 с.
7. *Шульга Н.А., Борисенко Л.В.* Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрических нагружениях // Прикл. механика. - 1989. - 25, № 10. - С. 41-47.
8. *Шульга Н.А., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. - К.: Наукова думка, 2007. - 272с.
9. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O.* Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries / *Int. Appl. Mech.* - 2011. - 47, N 2. - Pp. 177-185.
10. *Shul'ga M.O., Grigoryeva L.O.* Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis.* – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – P.179-204.
11. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kirichenko A.A.* Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Condition // *Int. Appl. Mech.* - 2014. - 50, N 3. - Pp. 274-281.

REFERENCES

1. *Bezverkhyy O.I., Grigorieva L.O.* Metod doslidzhennya osesimetrichnih kolivan p'zokeramichnih til // (Research method of axially symmetric oscillations of piezoceramic bodies) // *Problemi obchisluyvalnoy mehaniki i mitsnosti konstruktсий (Problems of computational mechanics and strength of structures)*, 2015. - Vol. 24. - P. 5-17.
2. *Bolkisev, A.M., Shul'ga, N.A.* Vynuzhdennye kolebaniya p'ezokeramicheskogo pologo cilindra (radial'naya polyarizatsiya) (Forced Vibrations of Piezoceramic Hollow Cylinders (radial polarization)) // *Prichladnaya mehanica*, 1985. - 21, № 5. - С. 118-121. –rus.
3. *Washizu, K.* Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, 1982
4. *Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.* Metody splajn-funkcij (Methods of spline functions). - М: Science, 1980. - 350 p. –rus.

5. *Mexanika svyazannyx polej v elementax konstrukcij (Mechanics of related fields in structural elements) in 5 volumes / edited by A.N. Guz. V. 5. Elektrouprugost' (Electroelasticity) / Grinchenko, V.T., Ulitko, A.F., Shul'ga, N.A. - Naukova Dumka, Kyiv, 1989. – 280 p.-rus.*
6. *Shul'ga N.A., Bolkisev A.M. Kolebaniya p'ezokeramicheskix tel (Vibrations of piezoceramic bodies). - Naukova Dumka, 1990. - 228 p.-rus.*
7. *Shul'ga, N.A., Borisenko, L.V. Vibrations of an Axially Polarized Cylinder during Electrical Loading // Int. Appl. Mech, 1989. – 25, N 10. – P. 1070–1075.*
8. *Shul'ga M.O., Karlash V.L. Rezonansni elektromexanichni kolivannya p'jezelektrichnix plastin (Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates). - Naukova Dumka, Kyiv, 2008.-ukr.*
9. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries // Int. Appl. Mech., 2011. - 47, N 2. - P. 177-185.*
10. *Shul'ga M.O., Grigoryeva L.O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – P.179 – 204.*
11. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kirichenko A.A. Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Condition // Int. Appl. Mech., 2014. - 50, N 3. - Pp. 274-281.*

Bezverkhyy O.I., Grigoryeva L.O.

VARIATIONAL-SPLINE METHOD IN RESEARCH PROBLEMS OF AXIALLY SYMMETRIC PIEZOCERAMIC BODIES VIBRATIONS

In the paper there are considered hollow piezoceramic radially polarized cylinders what are widely used as sound projectors and receivers. The most characteristic run modes of piezoceramic transmitters are resonant modes. An approach to solving of piezoceramic cylinders harmonic oscillations problems on the basis of variational methods is proposed. Two-dimensional harmonic oscillations of polarized by thickness piezoceramic cylinders under electrical loads are studied. Using principle of Hamilton – Ostrogradskii and spline approximations by longitudinal coordinate the system of electroelasticity equations in cylindrical coordinates is reduced to a system of ordinary differential equations by radial coordinate. The suggested approach enables to research the oscillation of transmitters under electrical and mechanical loads at arbitrary boundary conditions. The resulting boundary value problem is integrated by discrete orthogonalization method. The proposed method has a number of advantages over decomposition of solution in series and variational, difference and variationally difference methods, since it involves obtaining a system of ordinary differential equations that is convenient for solving and does not require solving of great order algebraic systems, as in the difference or variationally difference methods, or the summing up of a large number of row members. The developed methodology is used for investigating of harmonic oscillation of cylinders with covered by membrane sides under electric potential loading, founding their resonant frequencies and modes investigation. Obtained results are tested by comparing with results found in the literature and obtained by other methods. The amplitude of movements of the outer surface depending on the loading frequency for the certain body is established. Resonance frequencies correspond to instant changing (great values) of physical characteristics. For investigating of forced vibration electromechanical state of transmitters near the first resonance we built forms of main strain-stress state characteristics at certain frequency. It is established that the maximum radial stresses in the cylinder are much smaller than the amplitude values of longitudinal and circumferential stresses.

Key words: electroelastic vibrations, variational principle, spline approximation, piezoceramic cylinder, resonance frequencies, forced vibrations, electric excitation.

Безверхий А.И., Григорьева Л.О.

ВАРИАЦИОННО-СПЛАЙНОВЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛ

На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского и сплайн аппроксимаций по одной координате уравнения гармонических осесимметричных электроупругих колебаний в цилиндрических координатах сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная краевая задача решается методом дискретной ортогонализации. Предложенная

методика позволяет эффективно исследовать гармонические колебания пьезокерамических тел цилиндрической формы при произвольных граничных условиях. Определены резонансные частоты радиально поляризованного полого цилиндра из пьезокерамики PZT-4, исследовано его динамическое электромеханическое состояние при моногармоническом электрическом нагружении.

Ключевые слова: пьезокерамические цилиндры, вынужденные упругоэлектрические колебания, электрическое нагружение, радиальная поляризация, принцип Гамильтона-Остроградского, сплайн-аппроксимация.

УДК 534-21:537.226.86

Безверхий О.І., Григор'єва Л.О. Вариційно-сплайновий метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.:КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 138-149.

Розвинуто чисельний підхід до дослідження гармонічних осесиметричних електропружних коливань електромеханічних перетворювачів циліндричної форми на основі варіційного принципу Гамільтона-Остроградського і сплайн-апроксимацій по одній координаті.

Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр. 11 назв.

Bezverkhyy O.I., Grigoryeva L.O. Variational-Spline Method in Research Problems of Axially Symmetric Piezoceramic Bodies Vibrations / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2017. - Issue 98. - P. 138-149. - Ukr.

For the study of harmonic axisymmetric electric-elastic oscillations of electromechanical converters of cylindrical shape a numerical approach on the basis of the Hamilton-Ostrogradsky variational principle and spline approximations in one coordinate is developed.

Tabl. 0. Fig. 3. Bibliograph. 11 ref.

Безверхий А.И., Григорьева Л.О. Вариационно-сплайновый метод в задачах исследования осесимметричных колебаний пьезокерамических тел / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2017. - Вып. 98. - С. 138-149.

Развит численный подход к исследованию гармонических осесимметрических электроупругих колебаний электромеханических преобразователей цилиндрической формы на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского и сплайн-аппроксимаций по одной координате.

Табл. 0 Ил. 3. Библиогр. 11 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор фіз.-мат.наук, професор, Національний транспортний університет, БЕЗВЕРХИЙ Олександр Ігорович

Адреса робоча: 02000, Україна, м. Київ, в. Суворова, 1, Національний транспортний університет, БЕЗВЕРХОМУ Олександру Ігоровичу

Мобільний тел.: +38 (067)-684-91-31

E-mail: O_bezver@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): канд.фіз.-мат.наук, доцент, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, ГРИГОР'ЄВА Людмила Олександрівна

Адреса робоча: 03057, Україна, м. Київ, в. П. Нестерова, 3, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, ГРИГОР'ЄВІЙ Людмилі Олександрівні

Мобільний тел.: +38 (097)-304-34-32

E-mail: l_grigoryeva@ukr.net

orcid.org/0000-0001-7013-0327

УДК 539.3

СТОХАСТИЧНА СТІЙКІСТЬ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ПАРАБОЛОЇДА

Ю.В. Ворона¹,
канд. техн. наук,

О.О. Лук'яненко¹,
канд. техн. наук;

О.В. Костіна¹,
канд. техн. наук.

*¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Досліджена стохастична стійкість параметричних коливань гіперболічного параболоїда при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку. Система диференціальних рівнянь першого марківського наближення для других моментів зі сталими коефіцієнтами отримана за допомогою функціонального підходу, методу скінченних елементів та асимптотичного методу, що базується на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром. Виконано якісний аналіз режимів стохастичних параметричних коливань гіперболічного параболоїда при дії поверхневого тиску за допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку та характеристичних показників Хілла. Визначені області динамічної нестійкості гіперболічного параболоїда та критичні значення стохастичного навантаження.

Ключові слова: нелінійна стійкість, стохастична стійкість, параметричні коливання, функціональний підхід, гіперболічний параболоїд.

Вступ. Значний вклад в загальну теорію динамічної стійкості пружних систем, в тому числі в дослідження параметричних коливань детерміністичних систем, зробили М.М. Беляєв, М.М. Крилов і М.М. Боголюбов, В.В. Болотін [1,2]. В працях Р.Л. Стратоновича, Р.З. Хасмінського, М.Ф. Діментберга, В.І. Кляцкіна, А.С. Вольміра та інших [3-15]. Значне місце серед динамічних задач на теперішній час займають задачі стохастичної стійкості параметричних коливань пологих оболонок [16-19]. Кількість робіт, яка присвячена дослідженню статичної і динамічної поведінки пологих оболонок від'ємної гаусової кривизни небагато [20-23]. В статті [24] автори навели чисельну методику побудови редукованої моделі стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда. Для формування редукованих матриць мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості застосовані процедури програмного комплексу скінченно-елементного аналізу. В результаті аналізу впливу постійної складової параметричного навантаження на власні частоти коливань виявлена втрата стійкості гіперболічного параболоїда в деякому

діапазоні навантаження з подальшим виходом в зону стійкості. Ця особливість врахована в даній статті при дослідженні стохастичної стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку.

1. Математична модель стохастичної стійкості гіперболічного параболоїда при дії параметричного навантаження. В статті досліджена стійкість гіперболічного параболоїда, фізичні та геометричні параметри якого прийняті рівними: сторона $a = b = 0,2$ м, товщина $h = 0,5$ мм, модуль пружності $E = 98,1$ ГПа, коефіцієнт Пуасона $\mu = 0,25$, прогин $f = 0,06$ м. Поверхня гіперболіда моделювалась у вигляді сукупності чотирьохкутних плоских скінченних елементів зі шістьма степенями вільності у вузлах за допомогою комплексу NASTRAN [25]. Вузли контуру оболонки жорстко закріплені. Стохастичне параметричне навантаження подавалось у вигляді поверхневого тиску $z(t) = z_0 + \tilde{z}(t)$, де z_0 – стала складова навантаження; $\tilde{z}(t)$ – випадкова дельта-корельована складова навантаження з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left(\cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right) \quad (1)$$

і скінченним часом кореляції

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{\sigma_0^2} \int K(\tau) d\tau = \frac{1}{\sigma_0^2} \int \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left(\cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right) d\tau = \\ &= \int e^{-\alpha\tau} \cos \theta_\alpha \tau d\tau + \int e^{-\alpha\tau} \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau d\tau = \\ &= \frac{e^{-\alpha\tau} (-\alpha \cos \theta_\alpha \tau + \theta_\alpha \sin \theta_\alpha \tau)}{(-\alpha)^2 + \theta_\alpha^2} \Big|_0^\infty + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \left(\frac{e^{-\alpha\tau} (-\alpha \sin \theta_\alpha \tau - \theta_\alpha \cos \theta_\alpha \tau)}{(-\alpha)^2 + \theta_\alpha^2} \right) \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} \right) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

де σ_0^2 – інтенсивність стохастичного впливу; α – параметр кореляції, θ_α – частота схованої періодичності.

Система диференціальних рівнянь, яка описує стохастичну стійкість параметричних коливань пологої оболонки, зформована і представлена авторами в статті [18]. Вона отримана за допомогою функціонального підходу, методу скінченних елементів та асимптотичного методу, що

базується на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром і має вид матричних рівнянь першого марківського наближення для моментних функцій фазових координат другого порядку

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = (A + DB^2) \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle (A + DB^2)^T + 2\sqrt{D}B \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T \quad (3)$$

з початковими умовами $\langle \bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0) \rangle = (\bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T)$.

В системі (3) усереднені за ансамблем реалізацій моментні функції другого порядку фазових координат

$$\bar{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_{2m}(t))^T = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_m(t))^T,$$

де $\bar{y}(t)$ – m - вимірний вектор вузлових переміщень; $D = \sigma_0^2$ – дисперсія стохастичного впливу; матриці A і B обчислюються за формулами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -(M^*)^{-1} K^* & -(M^*)^{-1} C^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(M^*)^{-1} K_G^* & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тут E – одинична матриця розмірністю $m \times m$; M^* , C^* , K^* та K_G^* – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, які обчислюються за методикою [18]. Питання стохастичної стійкості параметричних коливань пологої оболонки зводиться до дослідження у середньому стійкості рівнянь від моментних функцій фазових координат другого порядку.

Редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості рівнянь (4) отримані за допомогою розв'язання лінійної (Linear Static),

нелінійної (Nonlinear Static) задач статики та задачі стійкості (Buckling) гіперболічного параболоїда при дії сталої складової поверхневого тиску $z_0 = q_0 = 98100 \text{ Па}$ [24].

Статична нелінійна поведінка гіперболіда (рис. 1) співпадає з дослідженнями, результати яких наведені в працях [21, 22]. Поведінка випуклої та вигнутої парабол оболонки

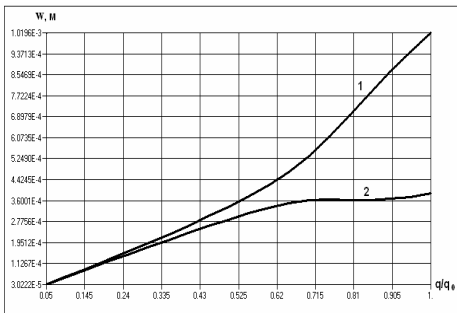


Рис. 1. Криві навантаження гіперболічного параболоїда: 1 - випукла параболоїда, 2 - вигнута параболоїда

відрізняється при навантаженні $q \geq 0,62q_0$. Оболонка стиснута вздовж випуклої параболи та розтягнута вздовж вигнутої параболи.

Деформований стан гіперболоїда на різних кроках її навантаження представлено на рис. 2.

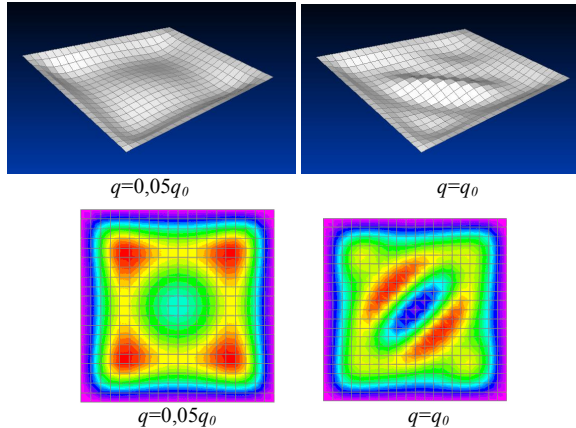


Рис. 2. Деформація гіперболоїда на різних кроках статичного навантаження:

На рис. 3 наведені перші п'ять форм втрати стійкості та відповідні критичні значення навантаження, які отримані за допомогою розв'язання задачі на власні значення методом Ланцоша (Bucling). Хоча перша форма втрати стійкості гіперболоїда співпадає з результатом нелінійної задачі (рис. 2, б), при $q_{cr1} = 0,6992q_0$ спостерігається втрата стійкості яка не мала місця при розв'язанні нелінійної задачі статички (Nonlinear Static) (рис. 1).

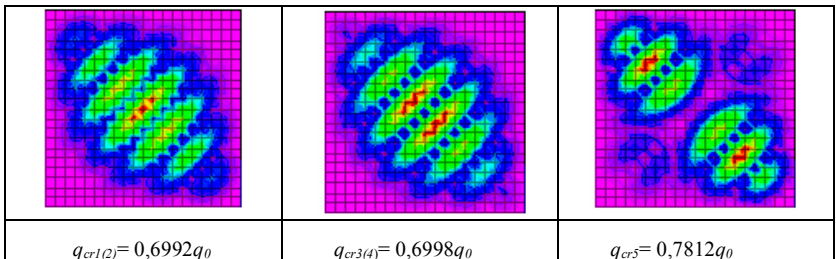


Рис. 3. Перші п'ять форм втрати стійкості гіперболоїда та критичних значень сталої складової стохастичного навантаження (Bucling)

Модальний аналіз гіперboloїда виконано в лінійній (Normal Modes) і в нелінійній постановках без урахування і з урахуванням сталої складової параметричного навантаження (Nonlinear Static, Modes_Param). На рис. 4 представлені перші п'ять форм і частот власних коливань гіперболічного параболоїда.

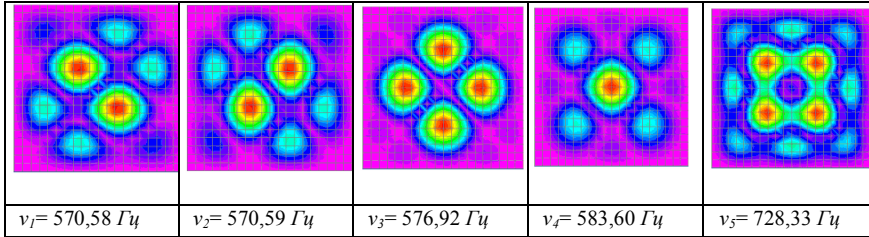


Рис. 4. Форми власних коливань гіперболічного параболоїду (Normal Modes)

Форми коливань відрізняються від форм втрати її стійкості (рис. 3) при дії сталої складової параметричного навантаження. Спостерігаються як симетричні так і косиметричні форми відносно парабол і осей симетрії.

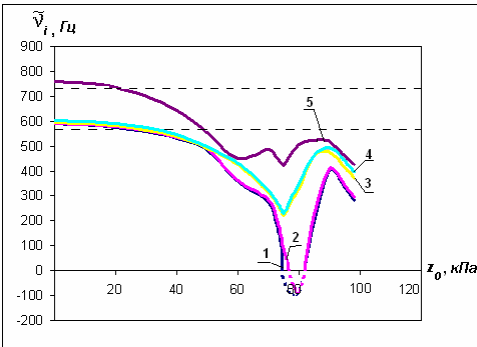


Рис. 5. Вплив сталої складової параметричного навантаження на частоту власних коливань гіперboloїда: 1-першу, 2-другу, 3-третю, 4-четверту, 5-п'яту

Особливість динамічної поведінки гіперболічного параболоїда виявлено при дослідженні частот і форм його власних коливань при дії сталої складової параметричного навантаження $z_0 = [0,001 - 1]q_0$ (рис. 5).

Дослідження поведінки гіперболічного параболоїда дозволяють з урахуванням представити систему рівнянь (3) у вигляді

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta_1^2(t) \rangle = 2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle = \langle \zeta_2^2(t) \rangle - \omega_i^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle - 2 \varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta_2^2(t) \rangle = -4 \varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_2^2(t) \rangle - 2 \omega_i^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle + \omega_i^4 \sigma_{0i}^2 \tau_0 \sum_{k=1}^5 a_{ki}^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle, \quad (5)$$

з початковими умовами $\zeta_1(0) = y_{0i}, \zeta_2(0) = \dot{y}_{0i}$.

Тут $\zeta_1(t) = y_i(t)$, $\zeta_2(t) = \dot{y}_i(t)$ ($i, k = 1, 2, \dots, 5$); коефіцієнти a_{ki} – члени редукованої матриці геометричної жорсткості, ε_i – коефіцієнт демпфірування оболонки по i -тій частоті коливань; $m = 5$ – число утриманих форм власних коливань.

2. Дослідження стохастичної стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда. Вплив стохастичної складової параметричного навантаження $\tilde{z}(t)$ на моментні функції другого порядку оцінено за допомогою інтегрування системи диференціальних рівнянь (5) методом Рунге-Кутти четвертого порядку. На рис. 6 представлена динамічна поведінка розв'язку $\zeta_1^2(t)$ системи (5) та фазові траєкторії при частоті схованої періодичності стохастичного навантаження $\theta_\alpha = \omega_1 = 3585,0761 \text{ c}^{-1}$, коефіцієнті демпфірування $\varepsilon_1 = 0,002$, параметрі кореляції $\alpha = \varepsilon_1 \omega_1 = 7,1702$, радіусі кореляції $\tau_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ c}$ та інтенсивності стохастичного навантаження $\sigma_0^2 = [1 - 0,5q_{cr1}]$. При $\sigma_0^2 = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ значення $\zeta_1^2(t)$ з часом зменшується, що відповідає стійкому режиму коливань оболонки (рис. 6, а). Нестійкий режим коливань спостерігається при $\sigma_0^2 = 2,814 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коли значення $\zeta_1^2(t)$ збільшується (рис. 6, б). На границі області стійкості спостерігається стійкий режим параметричних коливань (рис. 6, в), інтенсивність стохастичного навантаження $\sigma_0^2 = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

Також вплив стохастичної складової параметричного навантаження $\tilde{z}(t)$ при $z_0 = 0$ на стійкість гіперболоїда в першому наближенні можна дослідити, якщо систему (5) переписати у вигляді лінійної автономної системи

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t)\zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix} = G(t) \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t)\zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

де $G(t)$ – матриця, коефіцієнти якої є $2\pi/\omega$ – періодичні функції

$$G(t) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega_i^2 & -2\varepsilon_i\omega_i & 1 \\ a_{ii}^2\omega_i^4 & \sigma_0^2\tau_0 & -2\omega_i^2 & -4\varepsilon_i\omega_i \end{vmatrix}. \quad (7)$$

На рис. 7 представлена поведінка дійсних частин характеристичних показників Хілла системи (7) від впливу стохастичного параметричного навантаження. Частота схованої періодичності $\theta_\alpha = \omega_1 = 3585,0761 \text{ c}^{-1}$, параметр кореляції $\alpha = \varepsilon_1 \omega_1 = 7,1702$ та радіуси кореляції

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ c}.$$

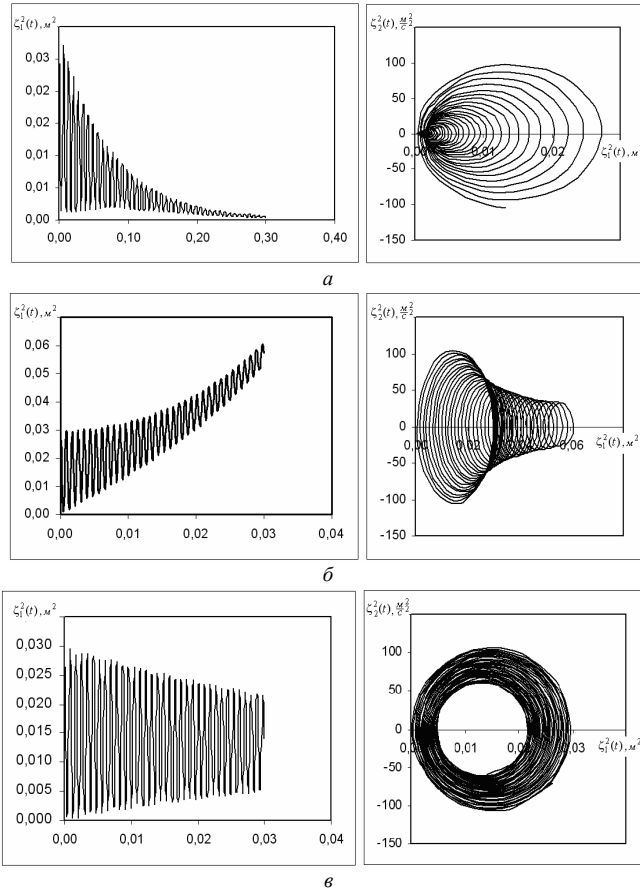


Рис. 6. Динамічні режими коливань оболонки при стохастичному параметричному впливі: *а* – стійкий; *б* – нестійкий; *в* – стійкий режим на границі області стійкості

Додатні дійсні частини характеристичних показників відповідають нестійкому режиму коливань і лежать у верхній півплощині, від'ємні -

стійкому і лежать у нижній півплощині. Точки перетину суцільної кривої осі координат відповідають критичним значенням стохастичної складової параметричних коливань. На рис. 8. наведена залежність критичного значення інтенсивності стохастичної складової навантаження σ_0 від відносної частоти схованої періодичності $\beta = \theta_\alpha / \omega_1$ при $\varepsilon_1 = 0,002789$ для першої частоти власних коливань гіперболічного параболоїда.

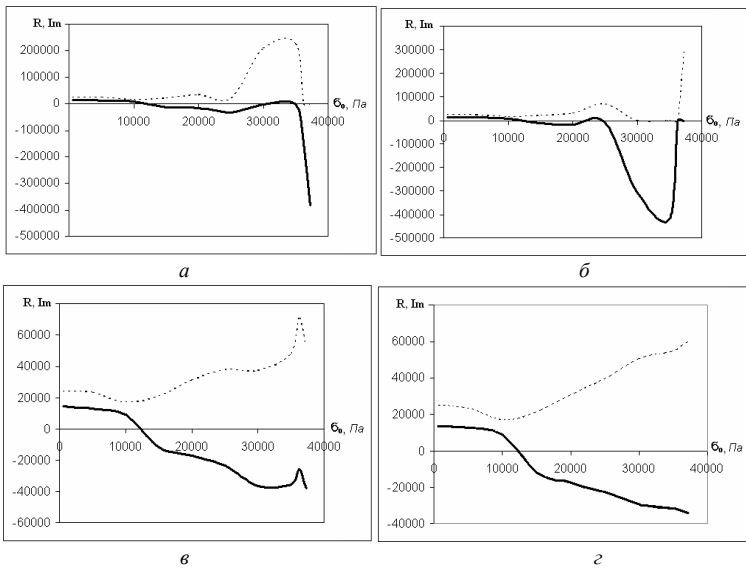


Рис. 7. Залежність характеристичних показників Хілла від інтенсивності стохастичного впливу: а - г $\varepsilon_1 = [0,0002789, 0,002789, 0,02789, 0,2789]$

Стойкою є область, яка обмежена кривою 1 і віссю абсцис, нестійкою – область, яка лежить вище за криву 1. Штриховими кривими 2 і 3 обмежена область стійкості, яка з'являється тільки при $\varepsilon_1 > 0,002789$.

Висновок. Редукована модель стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда, яка представлена у вигляді диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку,

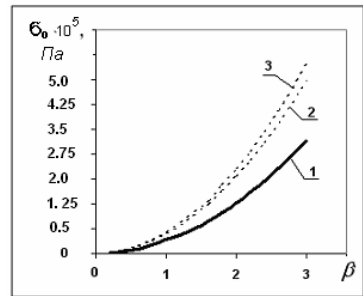


Рис. 8

дозволила виконати якісний аналіз режимів стохастичних параметричних коливань гіперболоїда. Розв'язок задачі стохастичної стійкості отримано за допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку та характеристичних показників Хілла. Визначені області динамічної нестійкості гіперболічного параболоїда та критичні значення стохастичного параметричного навантаження при різних значеннях коефіцієнта демпфірування та частоти схованої періодичності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
2. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. - М., Наука, 1979. – 335 с.
3. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, 1963.
4. *Khasminskii R.Z.* A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides// Theor. Probab. Its Appl., 1966. – No. 11. – С. 390-406.
5. *Клячкин В.И.* Стохастические уравнения в случайно однородных средах // - М.: Наука, 1980. – 336 с.
6. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. - М.: Наука, 1982. – 432 с.
7. *Nayfeh A.H.* The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to a parametric excitation// J. of Sound and Vibr., 1983. – vol. 88, No. 4. – P. 547-557.
8. *M.M. Klosek-Dygas, B.J. Matkowsky, Z. Schuss.* Stochastic stability of nonlinear oscillators// SIAM J. Appl. Math., 1988. – vol. 48, No. 5. – С. 1115-1127.
9. *Dimentberg M.F.* Stochastic Processes in Dynamic Systems with Variable Parameters. - М., Наука, 1989.
10. *S.T. Ariaratnam and Wei-Chau Xie.* Lyapunov exponents and stochastic stability of two-dimensional parametrically excited random systems// Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1993. – vol. 60, No. 3. – С. 667-682.
11. *M. Labou.* Stochastic stability of parametrically excited random systems // Int. Appl. Mech., 2004. – vol. 40, No. 10. – P. 1175–1183.
12. *M. Labou.* Stochastic stability of three-dimensional linear systems under parametric random action// Int. Appl. Mech., 2010. – vol. 46, No. 4. – P. 124-143.
13. *M. Labou.* On stability of parametrically excited linear stochastic systems// Int. Appl. Mech., 2011–vol. 47, No. 10. – P. 1440-1453.
14. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному збудженні// Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2000.– Вип. 67. – С. 51-59.
15. *Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 20 – 27.
16. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 24-34.
17. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О.* Побудова редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині// Опір матеріалів та теорія споруд. - К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. – С. 11-19.
18. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.* Чисельна побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – с. 73-87.

19. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.* Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С.145-185.
20. *Като В., Нишимура Т.* Покрытие, образуемое сочетанием гиперболических параболоидов. В сб.: Большепролетные оболочки. - М.: Стройиздат, 1969.–С. 167-195.
21. *Самольянов И.И.* Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида. - Луцк.: Луцкий индустриальный институт, 1993. – 316 с.
22. *Сунак О.П., Ужегов С.О., Пахалюк О.А.* До визначення внутрішніх зусиль у пологій оболонці від'ємної гаусової кривини при дії вертикального навантаження// Ресурсекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. -2012. – Вип. 23. – С. 411-416.
23. *Рабинович Р.И.* Динамический расчет пологих оболочек по нелинейной теории // В сб.: Строительное проектирование промышленных предприятий. - М.: Главпромстройпроект, 1965, № 5. – С. 45-50.
24. *Баженов В.А., Лук'янченко О.А., Ворона Ю.В., Костіна Е.В.* Особенность построения редуцированной модели устойчивости параметрических колебаний гиперболического параболоида // Прикладная механика, Киев, 2017.
25. *Рычков С.П.* MSC.visualNASTRAN для Windows. - М.: ИТ Пресс, 2004. – 552 с.

REFERENCES

1. *Bolotin V.V.* Dinamicheskaya ustoychivost uprugikh sistem [The Dynamic Stability of Elastic Systems]. М.: Gostekhizdat, 1956. – 600 s.
2. *Bolotin V.V.* Sluchaynye kolebaniya uprugikh sistem [Random vibrations of elastic systems].. М.: Nauka, 1979. – 335 s.
3. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, 1963.
4. *Khasminskii R.Z.* A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides// Theor. Probab. Its Appl., 1966. – No. 11. – S. 390-406.
5. *Klyatskin V.I.* Stokhasticheskie uravneniya i volny v sluchayno-neodnorodnykh sredakh [Stochastic Equations and Waves in Randomly Inhomogeneous Media] М.: Nauka, 1980. – 336 s.
6. *Vol'mir A.C.* Nelineynaya dinamika plastin i obolochek [The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. М.: Nauka, 1982. – 432 s.
7. *Nayfeh A.H.* The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to a parametric excitation// J. of Sound and Vibr., 1983. – vol. 88, No. 4. – P. 547-557.
8. *Klosek-Dygas M. M., Matkowsky B. J., Schuss Z.* Stochastic stability of nonlinear oscillators // SIAM J. Appl. Math., 1988. – vol. 48, No. 5. – S. 1115-1127.
9. *Dimentberg M.F.* Sluchaynye protsessy v dinamicheskikh sistemakh s peremennymi parametrami [Stochastic Processes in Dynamic Systems with Variable Parameters]. М.: Nauka, 1989.
10. *S.T. Ariaratnam and Wei-Chau Xie.* Lyapunov exponents and stochastic stability of two-dimensional parametrically excited random systems// Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1993. – vol. 60, No. 3. – S. 667-682.
11. *M. Labou.* Stochastic stability of parametrically excited random systems // Int. Appl. Mech., 2004. – vol. 40, No. 10. – P. 1175–1183.
12. *M. Labou.* Stochastic stability of three-dimensional linear systems under parametric random action// Int. Appl. Mech., 2010. – vol. 46, No. 4. – P. 124-143.
13. *M. Labou.* On stability of parametrically excited linear stochastic systems// Int. Appl. Mech., 2011–vol. 47, No. 10. – p. 1440-1453.
14. *Bazhenov V.A., Busetta M., Dextyaryuk Ye.S., Otrashesvs'ka V.V.* Dy`namichna stijkist` pruzhny`x sy`stem pry` stoxasty`chnomu parametry`chnomu zbudzhenni (Dynamic stability of elastic systems with stochastic parametric excitation) // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2000.– V. 67. – S. 51-59.
15. *Dekhtryaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Otrashesvska V.V.* Dynamichna stiykist pruzhnykh system pry kombinovanomu stokhastychnomu navantazhenni (Dynamic stability of elastic systems under

- combined stochastic load) // *Opir materialiv i teoriya sporud*. K.: KNUBA, 2003. – V. 72. – S. 20-27.
16. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Borysenko V.H.* Metodyka redukovannya rivnyan' v zadakhkh parametrychnykh kolyvan' konstruktivnykh (Equations reduction techniques in problems of structures parametric oscillation). // *Opir materialiv i teoriya sporud*. K.: KNUBA, 2004. – V. 74 – S. 24-34.
 17. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O.* Pobudova redukovanoi modeli parametrychnykh kolyvan' tsylindrychnoi obolonky pry chystomu zhyni (Reduced model of a cylindrical shell parametric oscillation under pure bending) // *Opir materialiv i teoriya sporud*. K.: KNUBA, 2009. – V.84. – S.11-19
 18. *Bazhenov V.A., Dehtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.* Chyselna pobudova redukovanykh modelei stokhastychnykh parametrychnykh kolyvan' polohykh obolonok (Numerical construction of reduced models of shallow shells stochastic parametric oscillations) // *Opir materialiv i teoriya sporud*. K.: KNUBA, 2011. – V. 87. – S. 73-87.
 19. *Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Dynamichna stiiikst parametrychnykh kolyvan' pruzhnykh system (Dynamic stability of elastic systems parametric oscillations) // *Opir materialiv i teoriya sporud*. - K.: KNUBA, 2015. - V. 95. – S. 159-186.
 20. *Kato V., Nishimura T.* Pokrytie, obrazuemoe sochetaniem giperbolicheskikh paraboloidov. (Coverage, formed by a combination of hyperbolic paraboloids). - Sb.: Bol'sheproletnye obolochki. - M.: Stroyizdat, 1969. - S. 167-195.
 21. *Samolyanov I.I.* Prochnost, ustoychivost i kolebaniya giperbolicheskogo paraboloida (Strength, stability, and oscillations of a hyperbolic paraboloid). - Lutsk.: Lutskiy industrialnyi institut, 1993. – 316 s.
 22. *Sunak O.P., Uzhegov S.O., Paholyuk O.A.* Do vy`znachennya vnutrishnix zusy`l' u pologij obolonci vid'yemnoi gausovoi kry`vy`ny` pry` diyi verty`kal`nogo navantazhennya (To the determination of internal forces in a smooth shell of a negative Gaussian curvature under the action of vertical load) // *Resursoekonomni materialy, konstruktivni, budivni ta sporudy*. - 2012. – V. 23. – S. 411-416.
 23. *Rabinovich R.I.* Dinamicheskii raschet pologih obolochek po nelineynoy teorii (Dynamic calculation of shallow shells by nonlinear theory) // V sb.: Stroitelnoe proektirovanie promyshlennykh predpriyatiy. - M.: Glavpromstroyproekt, 1965, # 5. - S. 45-50.
 24. *Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.A., Vorona Yu.V., Kostina E.V.* Osobennost postroeniya redutsirovannoy modeli ustoychivosti parametricheskikh kolebaniy giperbolicheskogo paraboloida (The peculiarity of constructing a reduced model of stability of parametric oscillations of a hyperbolic paraboloid) // *Prikladnaya mehanika*, Kiev, 2017.
 25. *Ryichkov S.P.* MSC. visual NASTRAN dlya Windows. - M.: NT Press, 2004. – 552 s.

Vorona Yu.V., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.

STOCHASTIC STABILITY OF PARAMETRIC OSCILLATIONS OF A HYPERBOLIC PARABOLOID

The stochastic stability of a hyperbolic paraboloid shallow shell parametric oscillations is investigated. The shell is exposed to a delta-correlated random load and its vibrations are studied on the average using the second order moment functions of phase coordinates. A system of differential equations with constant coefficients for the first Markov approximation of second moments is obtained using the functional approach and the reduced discrete mathematical model. The reduced mass matrix, stiffness matrix and geometric stiffness matrix were obtained in previous paper of the authors using modern finite-element analysis software and developed computer code. The asymptotic method based on the statistical characteristics of the dynamic problem solutions expansion with respect to a small parameter is used as well. As a result of the analysis of the constant component of the parametric load influence on its eigenfrequencies, the loss of stability of the hyperboloid shell in a certain range of load and subsequent transition into the zone of stability was detected. This feature is taken into account in this article when studying the stochastic stability of parametric oscillations of a hyperbolic paraboloid shell under the action of a delta-correlated stochastic loads. A qualitative analysis of the hyperboloid stochastic parametric oscillations modes under the action of surface pressure is performed using the fourth-order direct Runge-Kutta numerical integration method and Hill's characteristic exponents. The regions of

dynamic instability of a hyperbolic paraboloid shell are determined and the critical values of the stochastic load are determined.

Keywords: nonlinear stability, stochastic stability, parametric oscillations, functional approach, hyperbolic paraboloid

Ворона Ю.В., Лукьянченко О.А., Костина Е.В.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Исследована стохастическая устойчивость параметрических колебаний гиперболического параболоида при действии дельта-коррелированной стохастической нагрузки в среднем на основе моментных функций фазовых координат второго порядка. Получена система дифференциальных уравнений первого марковского приближения для вторых моментов с постоянными коэффициентами с помощью функционального подхода, метода конечных элементов и асимптотического метода, основанного на разложении статистических характеристик решений динамической задачи по малому параметру. Выполнен качественный анализ режимов стохастических параметрических колебаний гиперболоида при действии поверхностного давления с помощью прямого метода численного интегрирования Рунге-Кутты четвертого порядка и характеристических показателей Хилла. Определены области динамической неустойчивости гиперболического параболоида и критические значения стохастического нагрузки.

Ключевые слова: нелинейная устойчивость, стохастическая устойчивость, параметрические колебания, функциональный подход, гиперболический параболоид.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Лук'янченко О.О., Костіна О.В. Стохастична стійкість параметричних коливань гіперболічного параболоїда // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 150-162.

Досліджена стохастична стійкість параметричних коливань гіперболічного параболоїда при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку.

Табл. 0. Ил. 8. Библиогр. 25 назв.

Vorona Yu.V., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V. Stochastic stability of parametric oscillations of a hyperbolic paraboloid // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – P. 150-162.

Parametric oscillations stochastic stability of a hyperbolic paraboloid is investigated. The shell is exposed to a delta-correlated random load and its vibrations are studied on the average using the second order moment functions of phase coordinates.

Tables 0. Fig. 8. Ref. 25 items.

Ворона Ю.В., Лукьянченко О.А., Костина Е.В. Стохастическая устойчивость параметрических колебаний гиперболического параболоида / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2017. – Вып. 98. – С. 150-162. – Укр.

Исследована стохастическая устойчивость параметрических колебаний гиперболического параболоида при действии дельта-коррелированной стохастической нагрузки в среднем на основе моментных функций фазовых координат второго порядка.

Табл. 0. Ил. 8. Библиогр. 25 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА, ВОРОНА Юрій Володимирович

Адреса робоча: 03680, Київ, Повітрофлотський проспект, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ВОРОНИ Юрію Володимировичу

Робочий тел.: +38(044)245-48-29

Мобільний тел.: +38(050)750-13-61

E-mail: yuvvv@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

Адреса робоча: 03680, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

Адреса домашня: 02152, Україна, м. Київ, вул. Івана Миколайчука 5/1, кв. 2, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

Робочий тел.: +38(044) 245-40-20.

Мобільний тел.: +38(067) 931-30-27.

E-mail: lukianch0907@meta.ua

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, КОСТІНА Олена Володимирівна.

Адреса робоча: 03680, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОСТІНІЙ Олені Володимирівні.

Адреса домашня: 03067, Україна, м. Київ, вул. Виборзька 17/19, кв. 41, КОСТІНІЙ Олені Володимирівні.

Робочий тел.: +38(044) 245-40-20.

Мобільний тел.: +38(098) 275-19-93.

E-mail: kl0867@meta.ua

УДК 539.375

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗВАРНОГО РОТОРУ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ МСЕ

С.О. Пискунов¹

доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки

О.І. Гуляр¹

доктор технічних наук, професор

Ю.В. Максимюк¹

кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки

С.В. Мицюк¹

кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки

Б.І. Сизевич¹

доцент кафедри будівельної механіки

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

В статті проведено визначення напружено-деформованого стану зварного ротору складної форми і вивчення характеру його зміни в процесі навантаження в результаті розвитку пластичного деформування.

Ключові слова: вісесиметричні тіла, нелінійне деформування теорія пластичної течії, пружнопластичне деформування, зони пластичності.

Вступ. Розвиток сучасного енергетичного машинобудування характеризується на даному етапі значним збільшенням потужностей окремих турбоагрегатів. У зв'язку з цим підвищуються вимоги до достовірності і точності визначення напружено-деформованого стану вузлів і деталей проєктованих об'єктів. Особливо зростають вимоги до достовірності одержуваних в результаті розрахунку даних при проєктуванні роторів парових турбін підвищеної потужності, для яких коефіцієнти запасу міцності відносно невеликі.

Метою даного дослідження є визначення напружено-деформованого стану зварного ротору складної форми і вивчення характеру його зміни в процесі навантаження в результаті розвитку пластичного деформування.

При розгляді таких відповідальних об'єктів велике значення має вибір розрахункової схеми. Розрахунок ротора як однієї деталі, що знаходиться в вісесиметричному пружно-пластичному стані, є досить складним.

Трикутні елементи, з лінійним законом розподілу переміщень, прийняті за основу в багатьох роботах, дозволяють більш гнучко, ніж прямокутні елементи, апроксимувати контур будь-якої форми. Але використання СЕ такого типу призводить до збільшення загального числа невідомих в

порівнянні з МСЕ. Додаткове підтвердження цьому отримано в результаті розв'язання задачі про обертання симетричного диску зі ступицею, розглянутої в роботі [1]. Зокрема, розподіл напружень по поверхні галтелі в цій статті визначено на підставі використанні 19 трикутних СЕ вздовж межі, в той час як при застосуванні чотирикутних скінчених елементів, в основі співвідношень яких лежить моментна схема скінчених елементів та врахування змінності геометричних параметрів [2, 3] для отримання стійких результатів достатньо лише 5 скінчених елементів. Таким чином, використання таких СЕ більш ефективним.

1. Постановка задачі. Ротор парової турбіни (рис. 1), являє собою тіло обертання, що складається з трьох масивних дисків змінної товщини і хвостової частини, з'єднаних між собою товстостінними циліндричними і конічними перемичками.

З'єднання дисків і перемичок виконані у вигляді галтелей постійного радіусу. За формою всі диски відрізняються між собою, що не дозволяє на підставі розрахунку одного з них судити про можливу картину напружено-деформованого стану всієї конструкції. Окремо взяті диски не мають осей симетрії як внаслідок власної конфігурації (диски №№ 1, 3), так і в результаті примикання перемичок на різних рівнях (диск № 2). Несиметричність розподілу напружень в диску № 3 обумовлена, крім того, відмінністю інтенсивності поверхневого навантаження, прикладеного на його ободах. Всі розміри на рис. 1 наведені у відносних величинах, які є кратними зовнішньому радіусу диска №3.

Зовнішні впливи, що складаються з масових сил і поверхневих навантажень на ободах дисків, відповідають 3000 об/мин.

Модуль пружності матеріалу $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа текучості при чистому зсуві $\tau_s = 400$ МПа.

При розрахунку конструкцій методом скінчених елементів велике значення має правильний вибір апроксимуючої сітки, що дозволяє отримати і

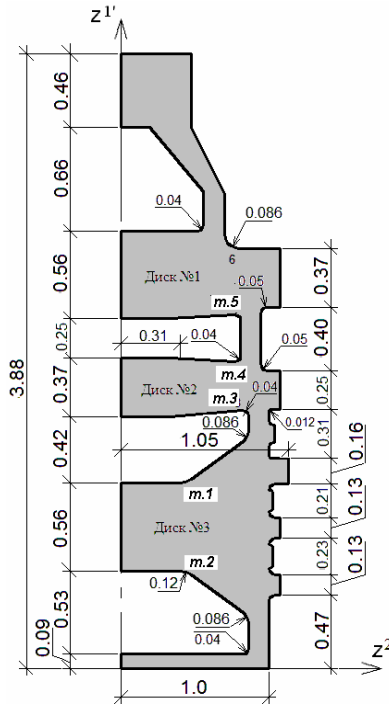


Рис. 1

стійкі результати. Оскільки меридіональний переріз має вигляд багатозв'язаної області складного контуру при побудові скінченоелементної моделі використане подання області у вигляді сукупності фрагментів, в межах кожного з яких скінченоелементна сітка є регулярною (рис. 2). При побудові СЕ сітки особливу увагу приділено галтельним зонам, тому що саме в цих місцях спостерігається різке збільшення градієнтів напружень. Для забезпечення коректного визначення напружень безпосередньо біля поверхні тіла, уздовж всього контура меридіонального перетину ротора, використаний шар скінченних елементів, товщина якого в прийнята рівною біля 1/10 радіуса галтелі. Уздовж галтелі прийнято 4-6 СЕ на кут 90° . Загальні принципи побудови розрахункової сітки ілюструються на прикладі диска № 2.

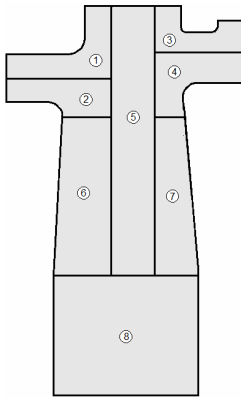


Рис. 2

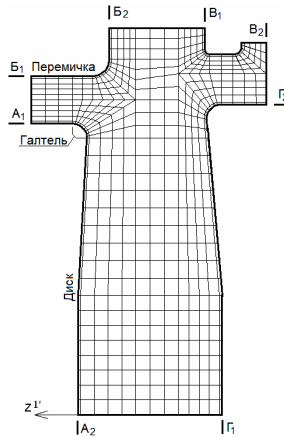


Рис. 3

контура меридіонального перетину ротора, використаний шар скінченних елементів, товщина якого в прийнята рівною біля 1/10 радіуса галтелі. Уздовж галтелі прийнято 4-6 СЕ на кут 90° . Загальні принципи побудови розрахункової сітки ілюструються на прикладі диска № 2. Розв'язки отримані із використанням СЕ сіток із 1925 (рис. 3) і 3403 вузлів показали, що розбіжність

результатів не перевищує 1-2%, що свідчить про їх високу збіжність і достовірність.

2. Результати розрахунку і їх аналіз. Проведене розв'язання задачі дозволяє виявити зони максимальних напружень, оцінити характер напруженого стану окремих конструктивних елементів та визначити найбільш небезпечні, з точки зору напруженого стану, ділянки контрукції. Отже максимальні значення напружень зафіксовані на поверхні диска № 3 і околі точки 1 (див. рис. 1) і становлять: компонента, нормальна до контуру $\sigma_1=534$ МПа, колове напруження $\sigma_3=418$ МПа, інтенсивність дотичних напружень $\tau_i=78$ МПа.

Внаслідок несиметричного прикладання навантаження величина напружень на поверхні диска № 3 в околі точки № 2, є дещо меншою. Слід зазначити ще 4 зони підвищених напружень ($\tau_i > 210$ МПа) в області зеднання дисків № 1 і № 2 з перемичками, положення яких також як і двох перших відзначено на рис. 1 цифрами в порядку зменшення величини τ_i . У всіх розглянутих випадках найбільші значення напружень зафіксовані

поблизу в точці переходу від зовнішньої поверхні диска до поверхні галтелі, що повністю узгоджується з розрахунковими та експериментальними даними, наведеними в роботі [1].

Напружений стан в середній частині перемичок характеризується відносно рівномірним розподілом по товщині кільцевих компонент напружень, причому більш завантаженими є точки, розташовані на внутрішній поверхні циліндрів. Осьові напруження змінюються в радіальному напрямку від від'ємних значень до додатніх, що свідчить про наявність моментного стану. Необхідно звернути увагу на незначну абсолютну величину напружень в центральних ділянках перемичок.

Наприклад, окружні складові не перевищують 260 МПа, осьові – 100 МПа; інтенсивність дотичних напружень перебуває в межах 175 МПа. Зазначений факт має позитивне значення, тому що в цих місцях розташовані зони зварювальних швів, в яких механічні характеристики матеріалу важко контролювані. Відносно невеликі напруження спостерігаються також в області хвостовика.

Розглянемо більш докладно результати визначення напруженого стану. Як приклад розглянемо дані для диска № 2. На рис. 4–7 суцільними лініями зображені розподілення нормальних до контуру σ_1 і колових σ_3 напружень та інтенсивності дотичних напружень τ_t . Ділянки контуру, яким відповідають зазначені розподілення, позначені на рис. 3. Аналіз цих результатів дозволяє зробити висновок, що на частині диска від осі обертання до галтелі розподілення напруження відносно рівномірні. Перепад напружень в радіальному напрямку на частині контурів $A^1 - A^2$ і $\Gamma^1 - \Gamma^2$ від осі обертання до зони округлення становить близько 20 МПа за виключенням

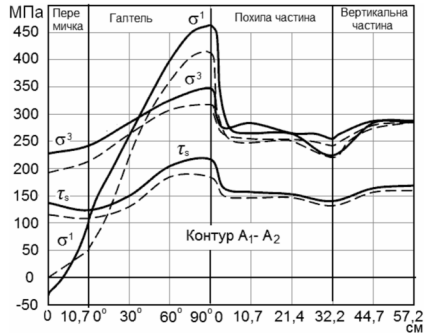


Рис. 4

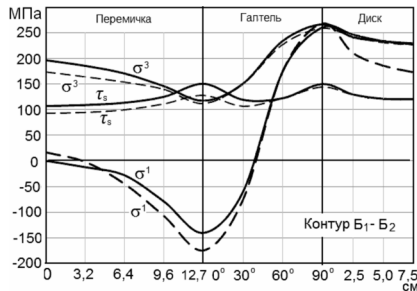


Рис. 5

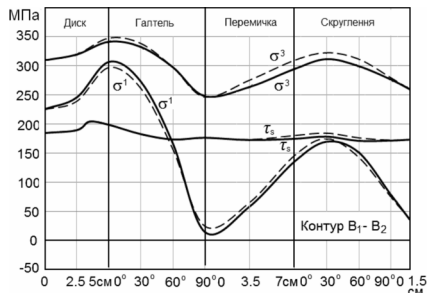


Рис. 6

області зміни перерізу диску. У цьому місці спостерігається локальне падіння напружень σ_1 на 35–40 МПа, а σ_3 – на 70–75 МПа в порівнянні з їх значеннями біля осі обертання, яке становить 290–350 МПа. В областях галтелей відбувається різке зростання (в 1,5–1,6 рази) нормальних контурних і приблизно в 1,2 рази кільцевих напружень.

При віддаленні від вісі обертання σ_1 зменшуються на краю диску до величини інтенсивності поверхневих навантажень, а компоненти σ_3 складають 190–260 МПа. В осьовому напрямку залежність величин напружень від координати z^1 близька до лінійної на більшій частині площині перерізу диску, за винятком ділянок прилягання перемичок. У цих місцях епюри напружень, побудовані уздовж ліній, що проходять через зони заокруглень паралельно осі обертання ротора, мають більш складний вигляд. Якщо провести таку лінію орієнтовно через точки 3–4 (див. рис. 1) то максимумами напружень будуть спостерігатися на протилежних кінцях прямої. За напрямком до центру диску відбувається досить різке (наприклад, для інтенсивності дотичних напружень порядку 100 МПа) зниження величини напруження. Подібний вигляд мають епюри напружень і в перерізах 1-2 і 5-6 для дисків № 1 і № 3. Таким чином концентрація напружень в районі заокруглення має поверхневий характер і досить швидко згасає.

Ці дані дозволяють намітити найбільш небезпечну ділянку в конструкції ротора. Мабуть, вона буде знаходитись на осі обертання диска №2, так як в цьому місці інтенсивність дотичних напружень по всій товщині диска становить 170–200 МПа. Для порівняння слід зазначити, що величина напружень в центрі перерізу 1-2 (диск №3), що проходить через точку виникнення максимальних напружень, складає всього 110 МПа і припускає можливість перерозподілу напружень при виникненні зон пластичності. У центральній частині диска № 2 таке перерозподіл важко очікувати, оскільки до моменту виникнення в цьому місці пластичних деформацій інтенсивність дотичних напружень по всій товщині буде близька до граничної. Як показано далі, це припущення повністю підтвердилося.

Збільшення числа оборотів ротора в умовах екстремальних режимів навантаження призводить до необхідності вивчати поведінку конструкції в пружно-пластичній стадії роботи матеріалу, механічні характеристики якого у розглянутій задачі досить точно апроксимуються моделлю пружно ідеально-пластичного тіла.

Для зменшення обчислювальних витрат при покроковому розв'язанні фізично нелінійної задачі розв'язок проведений для окремих фрагментів ротора, виділених із загальної конструкції. З конструктивної і статичної точок зору найбільш обґрунтованим є вибір в якості таких фрагментів дисків ротора, виділених площинами, які перпендикулярні до осі обертання і проходять через центри перемичок. Як було зазначено раніше, центри

перемичок є найменш напруженими ділянками конструкції, тому розділення ротора на фрагменти в цих місцях повинно призводити до мінімальних похибок. В якості граничних умов для перерізів з великим значенням координати приймемо вільний край, і для перерізів з меншим значенням вісь симетрії. При розрахунку використаний алгоритм розв'язання фізично-нелінійних задач, викладений, наприклад в [4].

На рис. 4–7 пунктирними лініями зображені епюри нормальних контурних напружень σ_1 , кільцевих σ_3 і інтенсивності дотичних напружень τ_i , отриманих на підставі розрахунку диску №2 як окремого фрагмента відповідно до запропонованої розрахункової схеми. Порівняння наведених епюр свідчить про близькість даних результатів до обчислених раніше на основі розрахунку ротора як єдиної конструкції. Максимальна похибка у зоні галтелей не перевищує в цьому випадку 12-15%, а в осі обертання – 3-4%. Однак, при розрахунку такої відповідальної конструкції як ротор парової турбіни потужністю 1200000 кВт навіть така похибка є небажаною. З метою підвищення точності розрахунку вплив відкинутих частин ротора замінено опорними реакціями, визначеними з розрахунку конструкції в цілому. У цьому випадку пружні розв'язки збігаються, а похибка пластичного розрахунку такого ж порядку як заміна впливу лопаток поверхневими навантаженнями на ободах дисків.

На рис. 8–11 представлені ізолінії інтенсивності дотичних напружень і розвиток зон пластичності (обмежені ізолініями, що відповідають 400 МПа і позначені сірим кольором) в перерізі диску №2 в залежності від швидкості обертання ротора.

Вперше пластичні деформації зафіксовані при 3800 об/хв на поверхні галтелі в околі точки 3. На рис. 8 представлені ізолінії інтенсивності дотичних напружень, що відповідають 4000 об/хв, коли пластичні деформації починають виникати також в околі точки 4. При 4250 об/хв спостерігається утворення зон пластичності біля осі обертання диска (рис. 9). Слід зазначити істотну відмінність у характері розвитку зон пластичності. Так, якщо в околі галтелей вони поширюються на незначну відстань від

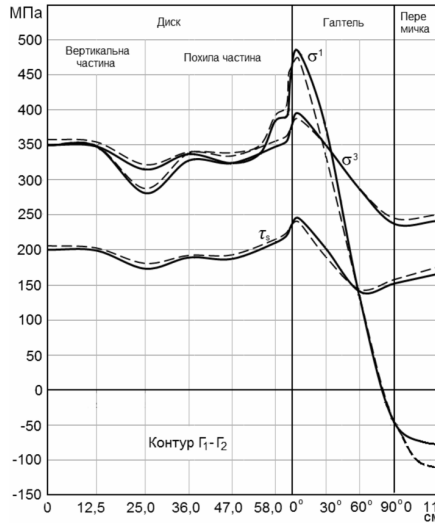


Рис. 7

поверхні ротора, то біля вісі обертання область пластичних деформацій має яскраво виражену тенденцію до розвитку в осьовому напрямку. Це стає особливо наочним при подальшому збільшенні швидкості обертання ротора. Вже при 4350 об/хв зона пластичності в осі обертання займає значну частину площі перерізу диска (рис. 10), а при 4400 об/хв – об'єднується із зоною пластичності в околі точки 3 (рис. 11). Отримана картина розвитку пластичних деформацій підтверджує початкове передбачення про те, що найбільш напруженим ділянкою ротора є перетин диска і вісі обертання.

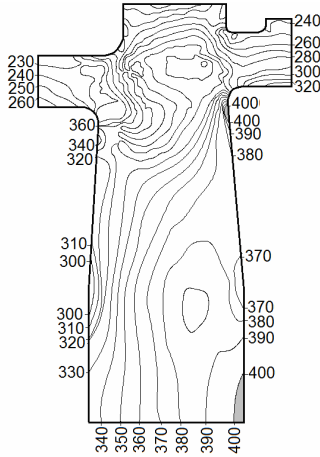


Рис. 8

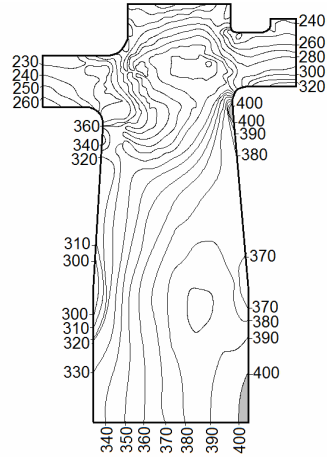


Рис. 9

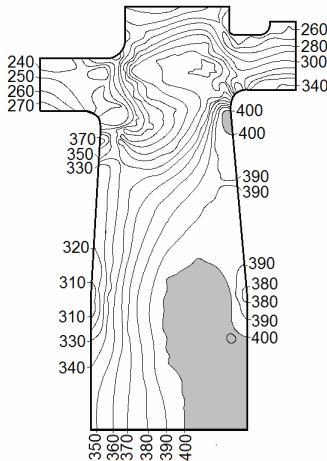


Рис.10

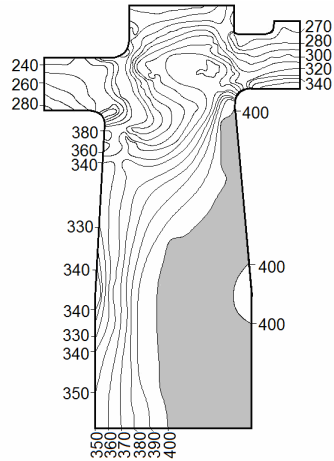


Рис.11

Висновок. Напружений стан ротора парової турбіни К-1200-240-2 відрізняється достатньою складністю і до його вивчення необхідно підходити з позицій просторової вісесиметричної задачі. Приблизну оцінку розподілу напружень в подібних конструкціях (похибка максимальних напружень близько 15%) можна проводити на основі розрахунку окремих дисків. При інших співвідношеннях жорсткостей дисків і перемичок це питання потребує додаткових досліджень. Незважаючи на те, що максимальні напруження спостерігаються в зонах скруглень, найбільш напруженими ділянками є точки перерізу біля осі обертання ротора.

В цілому отримані в даній статті результати свідчать, що використання скінчених елементів, в основі співвідношень яких лежить моментна схема скінчених елементів та врахування змінності геометричних параметрів [2, 3] дозволяє проводити розрахунок ротора у постановці, яка враховує всі геометричні особливості конструкції без будь-яких спрощень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ворошко П.П.* Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных дисков со ступицей / П.П.Ворошко, А.Л. Квитка, О.Н. Савина // Проблемы прочности, 1974, № 11.
2. *Гуляр О.І.* Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип.89. – С. 43-57.
3. *Максим'юк Ю.В.* Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип.94. – С. 244-251.
4. *Пискунов С.О.* Алгоритм розв'язання геометрично нелінійної задачі в'язкопружнопластичного деформування двовимірних тіл. / С.О. Пискунов, О.І. Гуляр, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – Вип. 83. – С. 44-62.

REFERENCES

1. *Voroshko P.P.* Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya symmetrichnyh diskov so stupicej / P.P.Voroshko, A.L. Kvy'tka, O.N. Savy'na // Problemy prochnosti. - 1974. - № 11.
2. *Gulyar O.I.* Efekty'vnist' momentnoyi shemy skincheny'h elementiv (MSSE) v zadachah zgyynu ta z koncentratoramy napruzhen / S.O. Piskunov, Solodey I.I., Yu.V. Maksim'yuk // Opir materialiv i teoriya sporud. - 2012. - Vip.89. - P. 43-57.
3. *Maksim'yuk Yu.V.* Rozrahunkovi spivvidnoshennya universal'nogo skinchenogo elementa na osnovi momentnoyi shemy skincheny'h elementiv / Yu.V. Maksim'yuk // Opir materialiv i teoriya sporud. - 2015. - Vip.94. - P. 244-251.
4. *Piskunov S.O.* Algorithm rozv'yazannya geometrichno nelineynoi zadachi v'yazkopruzhnoplasticnogo deformuvannya dvovimimih til. / S.O. Piskunov, O.I. Gulyar, Yu.V. Maksim'yuk // Opir materialiv i teoriya sporud. - 2009. - Vip.83. - P. 44-62.

Pyskunov S., Gulyar O., Maksimyuk Yu., Mytzyuk S., Sizevich B.

INVESTIGATION OF STRESSES STATE OF WELDED ROTOR USING OF MOMENT SCHEME OF FEM

The stress-strain state determination and the study its change as a result of plastic deformation development in the process of loading of the welded rotor of a complex shape has been carried out in the article.

The choice of the calculation scheme is very important when considering such responsible objects. The calculation of the rotor as a single component, located in a axis symmetric elastic-plastic state, is quite complicated. Triangular elements of the linear law of displacement distribution, adopted as a basis in many works, allow more flexible than rectangular elements, to approximate the contour of any form. But the use of finite element of this type leads to an increase in the total number of unknowns.

The stressed state of the rotor of the steam turbine K-1200-240-2 is of sufficient complexity and must be matched to the study as a spatial problem. An approximate estimation of stress distribution in similar structures can be made on the basis of calculation of separate parts of rotor. With other ratios of stiffness of discs and jumpers, this issue requires additional research. Despite the fact that maximum stresses are observed in the zones of rounding, the most stressed areas are points of the cross-section near the rotation axis.

In general, the results obtained in this article show that the use of finite elements, based on the momentary finite element scheme equation and taking into account the variability of geometric parameters allows to calculate the rotor in a statement, which takes into account all the geometric features of the design without any simplifications.

Key words: axisymmetric bodies, nonlinear deformation, theory of plastic flow, elastoplastic deformation, plasticity zone.

Пискунов С.О., Гуляр А.И., Максимюк Ю.В., Мицюк С.В., Сизевич Б.И.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СВАРНОГО РОТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ МКЭ

В статье проведено определение напряженно-деформированного состояния сварного ротора сложной формы и исследование характера его изменения в процессе нагружения в результате развития пластического деформирования.

Ключові слова: осесесиметричні тела, нелінійне деформування, теорія пластического течения, упругопластическое деформування, зони пластичности.

УДК 539.3

Пискунов С.О., Гуляр О.И., Максимюк Ю.В., Мицюк С.В., Сизевич Б.И. **Дослідження напруженого стану зварного ротору на основі моментної схеми МСЕ** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 163-172.

В статті проведено визначення напружено-деформованого стану зварного ротору складної форми і вивчення характеру його зміни в процесі навантаження в результаті розвитку пластичного деформування.

Табл. 0. Іл. 11. Бібліогр. 4 назв.

UDC 539.3

Maksimyuk Yu.

Pyskunov S., Gulyar O., Maksimyuk Yu., Mytzyuk S., Sizevich B. **Investigation of stresses state of welded rotor using of moment scheme of FEM** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue 98. – P. 163-172.

Determination of the stress-strained state of a welded rotor of a complex form and the study of the nature of stress-strained state change under the loading process as a result of the of plastic deformation development is performed in the article.

Table 0. Fig. 11. Ref. 4.

УДК 539.3

Пискунов С.О., Гуляр А.И., Максимюк Ю.В., Мицюк С.В., Сизевич Б.І.

Исследование напряжено-деформированного состояния сварного ротора с использованием моментной схемы МКЭ // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 98. – С. 163-172.

В работе изложены постановку задачи для определения несущей способности и критических поведения тонкостенных и комбинированных осесимметричных тел с учетом геометрической нелинейности.

Табл. 0. Рис. 2. Библиогр. 6 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *професор, доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Пискунов Сергій Олександрович.*

Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Пискунов Сергій Олександрович.*

Адреса домашня: *03087, Україна, м. Київ, вул. Іскрівська б.3, кв.10*

Робочий тел.: *+38(044) 241-5555;*

Мобільний тел.: *+38(050) 962-66-14.*

E-mail: *s_piskunov@ua.fm*

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА МАКСИМ'ЮК Юрій Всеволодович.*

Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Максим'юк Юрій Всеволодович.*

Адреса домашня: *Україна, м. Київ, вул. Кривоноса Максима, 6, кв. 322/3.*

Робочий тел.: *+38(044) 241-55-38;*

Мобільний тел.: *+38(067) 230-94-72;*

E-mail: *maximiyuk@ukr.net*

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *доцент, кандидат технічних наук, н.с. НДІБМ КНУБА Мицюк Сергій Вікторович.*

Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Мицюку Сергію Вікторовичу.*

Адреса домашня: *03037, Україна, м. Київ, просп. Валерія Лобановського 10, кв. 301*

Робочий тел.: *+38(044) 241-5555;*

Мобільний тел.: *+38(096) 931-74-42.*

E-mail: *serewka@inbox.ru*

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *доцент кафедри будівельної механіки КНУБА Сизевич Борис Іванович.*

Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Сизевичу Борису Івановичу.*

Робочий тел.: *+38(044) 241-5412.*

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Кривенко О.П.</i> Застосування методик прогнозування пружних характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі оболонки неоднорідної структури	3
<i>Баженов В.А., Шишов О.В.</i> Застосування інформаційних технологій при викладанні будівельної механіки	16
<i>Шкриль О.О.</i> Визначення G-інтеграла на основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій	31
<i>Кліменко В.З.</i> Опір матеріалів в розрахунках будівельних конструкцій	43
<i>Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Засць Ю.О., Шевчук Л.В.</i> Чисельне моделювання термонапруженого стану шаруватого покриття автомобільної дороги	56
<i>Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.</i> Аналіз власних коливань оболонок неоднорідної структури з використанням редукованої скінченноелементної моделі	72
<i>Бараненко В.О., Волчок Д.Л.</i> Обернена задача будівельної механіки армованої циліндричної оболонки зі склопластику	89
<i>Неміш В.М., Чернописький Д.Г.</i> Напружений стан товстих неканонічних оболонок обертання, близьких до сферичних, під дією поверхневих сил	104
<i>Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Gerashchenko O.V.</i> Research Infrastructures in Contemporary European Science	119
<i>Гревецев О.К., Селіванова Н.Ю., Геращенко О.В.</i> Перехідні процеси у циліндрах або дисках, що обертаються	128

Безверхий О.І., Григор'єва Л.О.

варіаційно-сплайновий метод в задачах дослідження
осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл 138

Ворона Ю.В., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.

Стохастична стійкість параметричних коливань гіперболічного
параболоїда 150

Пискунов С.О., Гуляр О.І., Максимюк Ю.В., Мицюк С.В., Сизевич Б.І.

Дослідження напруженого стану зварного ротору на основі
моментної схеми МСЕ 163

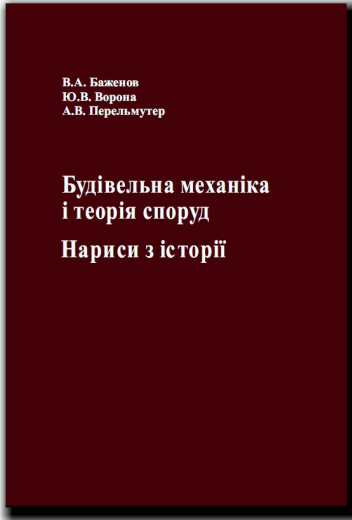
Баженов В.А., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В.

Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії. – К.: Каравела, 2016. – 428 с.

Книга присвячена історії будівельної механіки і теорії споруд і за задумом представляється у вигляді нарисів розвитку окремих їх напрямів, перелік яких, природно, є відкритим до розширення. При цьому кожному із напрямів притаманна певна історія виникнення і становлення відповідних понять, принципів, ідей, задач і методів їх реалізації.

Викладення змісту за розділами супроводжується фактами з життя і діяльності видатних учених, а також пізнавальними ілюстраціями. Адже, за словами Дж. Максвелла, “наука захоплює нас лише тоді, коли зацікавившись життям великих дослідників, ми починаємо стежити за історією їх відкриттів”.

Книга може бути використана як підручник для студентів вищих навчальних закладів при реалізації магістерських програм, вивченні спеціальних курсів тощо. Загалом, вона зорієнтована на студентів і читачів, які вже вивчали обов’язкові курси будівельної механіки і суміжних технічних дисциплін, а також викладачів і науково-технічних працівників.



Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД
STRENGTH OF MATERIALS AND THEORY OF STRUCTURES

Науково-технічний збірник
Scientific-and-technica collected articles

Випуск 98

Головний редактор В.А.Баженів

Підп. до друку 05.12.17. Формат 60x90^{1/16}. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.
Тираж 100.

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.
